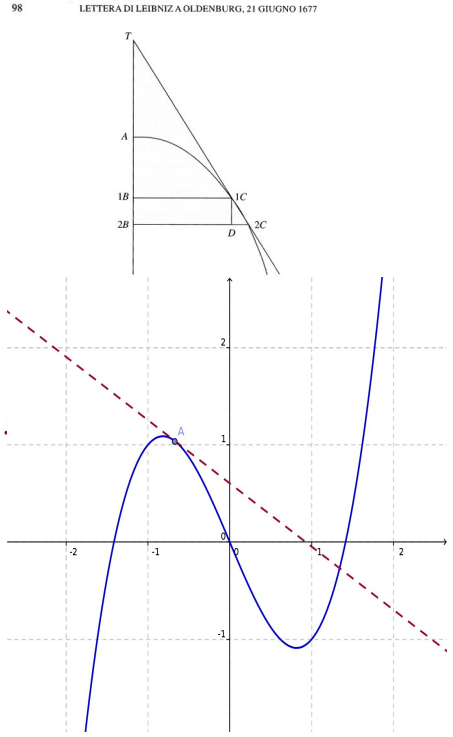
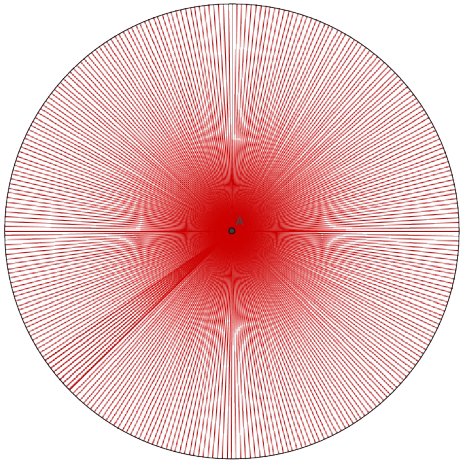
Percorsi, difficoltà, errori nell'uso della NSA nei licei

$$D_x x^n \simeq \frac{\left(x+dx\right)^n - x^n}{dx}$$



15 anni di sperimentazione
NSA in un liceo classico

Errori da evitare
Alternative
Problemi



$$e \simeq \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

© 2015 Paolo Bonavoglia

Quattro dubbi che emergono usando la NSA in un liceo

1. Anticipare derivate e integrali?
2. Limiti sì o no?
3. Storia della matematica?
4. Preoccuparsi per l'Esame di Stato?

Anticipare analisi? al III anno? al IV anno?

- Nei libri del III anno il problema delle tangenti viene di solito risolto con il metodo del delta, piuttosto macchinoso.
- Ha senso insistere? Non sarebbe meglio cogliere l'occasione per introdurre il metodo degli infinitesimi e le derivate?

Metodo del delta vs metodo delle derivate

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 5 \\ y - 3 = m(x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 5 \\ x^2 + 3x + 5 - 3 = mx + 2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (3-m)x + 2 - 2m = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (3-m)^2 - 4(2-2m) = 0$$

$$\Delta = 9 - 6m + m^2 - 8 + 8m = 0$$

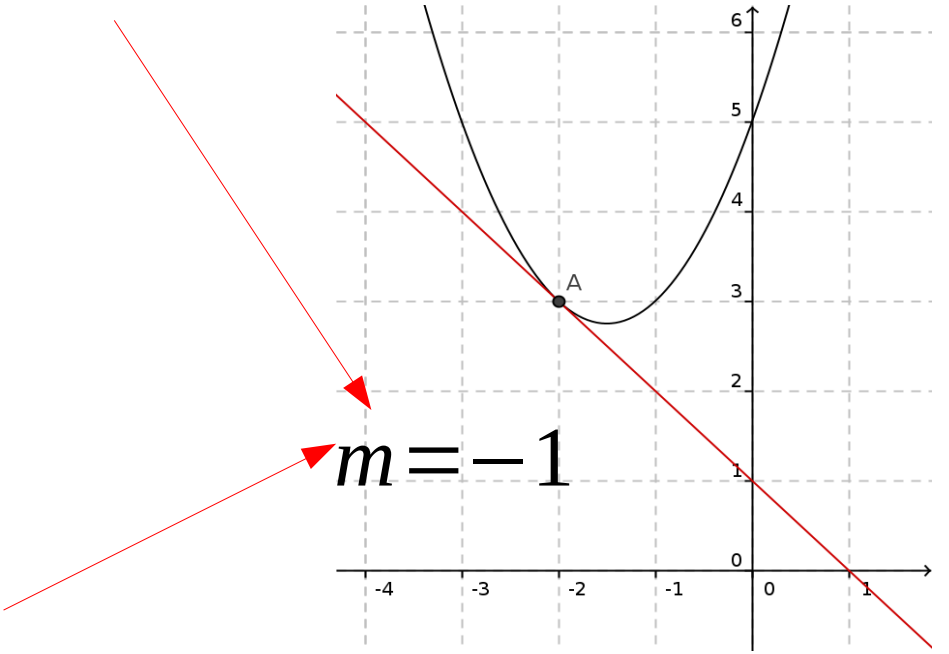
$$\Delta = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 = 0$$

$$y = x^2 + 3x + 5$$

$$y' = 2x + 3$$

$$m = f'(x) = 2x + 3$$

$$m = f'(-2) = 2(-2) + 3 = -1$$



Perché usare ancora il delta per trovare le tangenti?

- Con la NSA si possono introdurre le derivate in breve tempo senza dover passare per il concetto di limite
- Il monte ore in un liceo è limitato, quindi ogni risparmio di tempo è benvenuto.
- Perdendo il metodo del delta si perde qualcosa di essenziale?

Anticipare le derivate con la NSA

- Naturalmente il metodo delle derivate è di gran lunga superiore a quello del delta, più semplice da applicare, più generale …
- Ma occorre prima acquisire il concetto di derivata e saperle calcolare.
- Normale: in matematica metodi più efficienti e veloci nascono da nuovi concetti.
- Con la NSA questo si può fare molto più velocemente, questo è il punto.
-

Anticipare derivate e integrali i Pro

- Diluire il calcolo infinitesimale in tre anni, dando allo studente il tempo di ***abituarsi*** all'analisi, ripercorrendo di fatto la storia dell'analisi.
- Ritrovare il concetto di derivata mano a mano che si incontrano nuove funzioni, goniometriche, esponenziali …
- Possibile interazione con Fisica, non dimenticando che il calcolo è nato (Newton) anche per esigenze “fisiche”: velocità istantanea, accelerazione istantanea …

Anticipare derivate e integrali i Contro

1. Conflitto con le indicazioni nazionali?
2. Conflitto con i libri di testo in uso?
3. Conflitto con i commissari d'esame?

Anticipare derivate e integrali: Una strategia possibile

- La mia soluzione preferita negli ultimi anni:

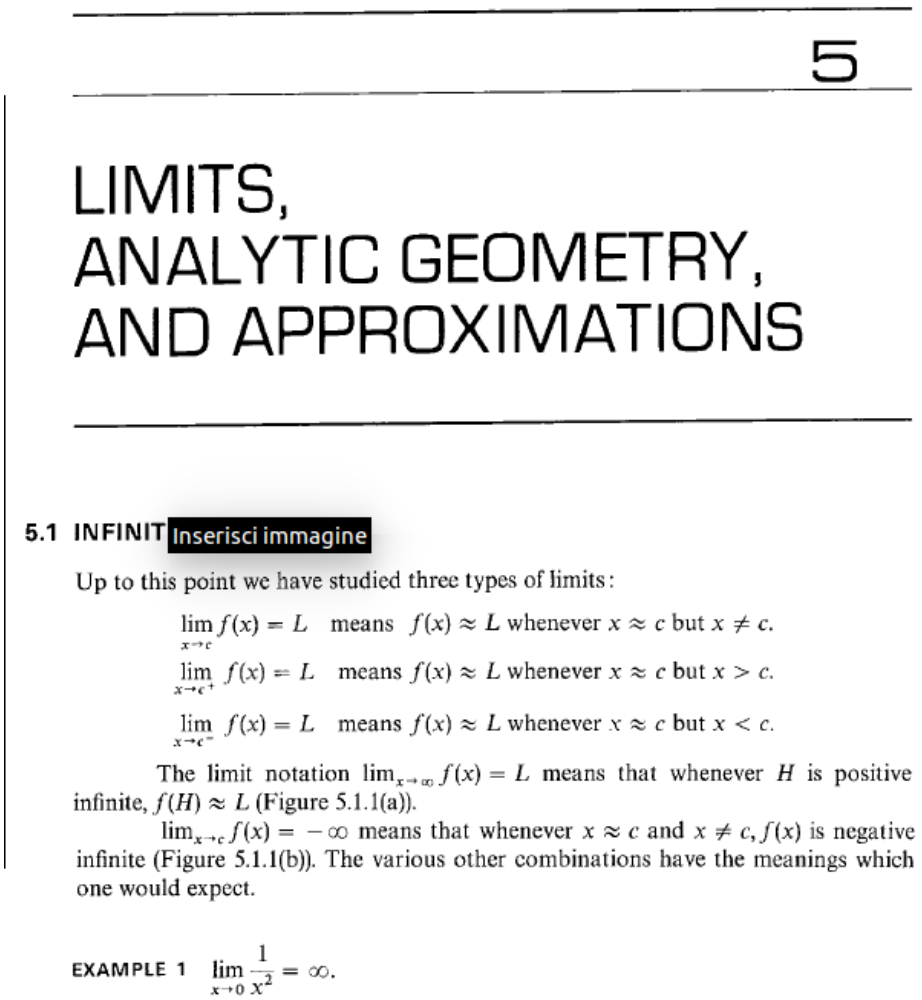
- All'inizio (3° o 4° anno) Introdurre derivate e integrali solo per le funzioni polinomiali; in questo modo ci si concentra sul significato di derivata e integrale senza essere appesantiti da complicazioni di calcolo.
- Lo stesso per lo studio di funzione. Da evitare anche lo studio di funzioni algebriche fratte con asintoti per lo stesso motivo.

Limiti sì o no?

- L'analisi NSA non ha bisogno dei limiti; gli iperreali, infinitamente piccoli, limitati o infinitamente grandi sono più che sufficienti.
- In una trattazione NSA in un liceo ha allora senso usare ancora la parola limite?
- O è meglio usare solo la parola iperreale?

Keisler

- Il testo del Keisler è stato per molti il primo approccio alla NSA
- Ha un capitolo sui limiti definiti a partire dalla nozione di infinitamente vicino.
- È una scelta valida per un liceo?
- O rischia di rendere il programma più pesante che con l'analisi classica??



5

LIMITS,
ANALYTIC GEOMETRY,
AND APPROXIMATIONS

5.1 INFINIT Inserisci immagine

Up to this point we have studied three types of limits:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ means $f(x) \approx L$ whenever $x \approx c$ but $x \neq c$.

$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ means $f(x) \approx L$ whenever $x \approx c$ but $x > c$.

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ means $f(x) \approx L$ whenever $x \approx c$ but $x < c$.

The limit notation $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ means that whenever H is positive infinite, $f(H) \approx L$ (Figure 5.1.1(a)).

$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ means that whenever $x \approx c$ and $x \neq c$, $f(x)$ is negative infinite (Figure 5.1.1(b)). The various other combinations have the meanings which one would expect.

EXAMPLE 1 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Limiti o iperreali?

Il numero ***e*** può definirsi in termini di numeri iperreali:

$$e \simeq (1+\varepsilon)^{\omega} = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$$

dove ε è numero infinitamente piccolo

e ω il suo reciproco, infinitamente grande.

Che cosa si aggiunge scrivendolo così?

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Limiti o iperreali?

Le forme di indeterminazione con gli iperreali diventano quasi banali, per esempio (infinito su infinito)

$$\frac{2\omega^2-2\omega+1}{\omega^2-2}$$

È un quoziente tra numeri infinitamente grandi che può essere semplificato usando le ordinarie regole dell'algebra.

$$\frac{2\omega^2-2\omega+1}{\omega^2-2}=\frac{2\omega^2\left(1-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}{2\omega^2\left(1-2\varepsilon^2\right)}=\frac{2-2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-2\varepsilon^2}\simeq 2$$

Nessun bisogno di usare

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+1}{x^2-2}=2$$

Pro e contro

Pro uso dei limiti

- Commissario Esame di stato
- Università per chi prosegue gli studi scientifici

Contro uso dei limiti

- Tempo aggiuntivo
- Si crea confusione?

Ma la matematica ha una storia?

- Nella trattazione tradizionale sia liceale sia universitaria, la matematica appare come una disciplina uscita così com'è dalla testa di Zeus. La storia della matematica si riduce a qualche noticina a piè di pagina o al massimo a qualche riquadro fuori testo.
- Anche alcune trattazioni NSA a partire dal Keisler seguono questo approccio.
- Pure la NSA potrebbe essere trattata come l'analisi vista nel corso della storia, da Zenone ad Archimede, a Leibniz, a Newton, a Eulero ...

Ma la matematica ha una storia?

«D'altra parte l'esperienza didattica mi ha insegnato come sia vantaggioso far percorrere alla mente degli allievi, per quanto è possibile, le stesse tappe attraverso a cui è passata la scienza nel suo sviluppo.»

Guido Castelnuovo – *Lezioni di Geometria analitica* – Soc. Ed. Dante Alighieri 1935 pag. VII

Nelle pagine seguenti tre schemi molto sommari su come presentare in modo storico l'analisi

La storia delle derivate

Il problema della tangente; il problema della velocità istantanea. Terzo paradosso di Zenone.

Soluzione di Lebniz (e di Newton) tramite infinitesimi.

Applicazioni matematiche e fisiche

Polinomi di Maclaurin

La storia degli integrali

Il metodo di esaustione di Archimede.

Metodo dei trapezi, di Cavalieri

L'integrale di Leibniz

Il teorema fondamentale

La storia degli iperreali (limiti?)

1° paradosso di Zenone

strada percorsa da A: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32} \ldots = 1 - \delta \simeq 1$

strada mancante a B: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots = \delta \simeq 0$

Legge di capitalizzazione: $C = C_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$1, 2.25, 2.370 \ldots, \ldots \simeq e$

Infinito: $1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots = \omega$

Introdurre iperreali e reali insieme?

L'esame di stato

- Alla fine del corso di studi incombe uno spauracchio:

  l'esame di stato!

  Il commissario di matematica nel 99% dei casi non conosce la NSA e le reazioni possono essere diverse.

- Nei licei umanistici c'è solo la prova orale, occasionalmente un quesito nella terza prova, quindi il problema è meno serio che allo scientifico.
- Occorre quindi chiarire bene la cosa nel documento del 15 maggio che il commissario è tenuto a leggere

1ª: Adattarsi all'esame di stato

(Maometto va alla montagna)

Prima soluzione: cercare di adattarsi alla commissione di stato.

Ma come?

Esempio:

1. A fine anno aggiungere qualche lezione sui limiti e sull'analisi classica. *Rischia di essere un rimedio peggiore del male.*
2. Nel corso degli anni fare qualche confronto tra NSA e analisi classica. *Un po' meglio della 1 ma ...*

In definitiva questa soluzione sembra un compromesso che rischia solo di creare confusione.

2ª: Ignorare l'esame di stato

(La montagna va a Maometto?)

- **Il mio compito di insegnante termina con lo scrutinio. L'esame di stato è un'altra cosa.**

  (mia insegnante liceale, anni sessanta)

  Seconda soluzione: ignorare l'esame di stato, il commissario dovrà adattarsi al programma.

  Per esempio:

1. Ignorare del tutto i limiti, finanche la parola limite.

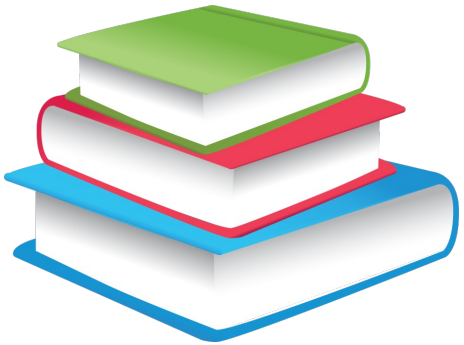
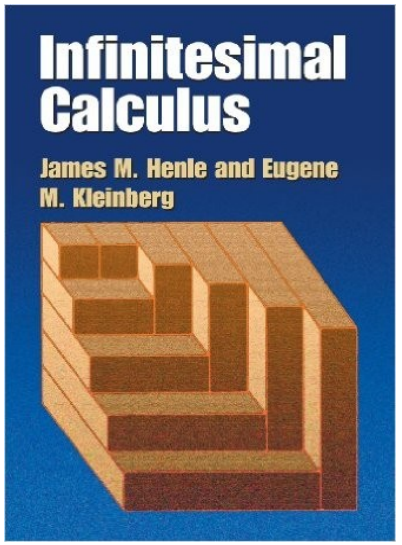
   Rischia di essere scambiato per un espediente per "saltare" un argomento importante.

2. Ignorare definizioni classiche di derivata e integrale … *idem*

Link e libri

- http://nsa.liceofoscarini.it

  (il mio sito NSA ...)

- http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html

  (Il libro di Keisler disponibile in PDF non digitalizzato)