Primi passi tra i sistemi dinamici - Seconda puntata

Nicola Sansonetto

PLS Corso di Aggiornamento per Insegnanti - **GeoGebra via Modelli Matematici**
Dipartimento di Informatica, Università degli Studi di Verona

26/09/2017

Linee guida di oggi

1. Riepilogo della prima puntata
2. Introduzione sui sistemi dinamici
3. Sistemi dinamici differenziali
4. Integrazione numerica
   - Gli integratori di GeoGebra
   - Integrazione numerica: il metodo di Euler
   - Integrazione numerica: il metodo di Runge–Kutta o Euler modificato

Cosa abbiamo fatto?

1. Affrontato uno o più modelli e abbiamo cercato di ricavarne informazioni (senza troppi aiuti);
2. Introduzione ai sistemi dinamici differenziali: modello di Malthus e modello Logistico, usando `RisolviEDO`:

$$\texttt{RisolviEDO[}X(x,y)\texttt{, punto di }X\texttt{]}$$

per risolvere $\frac{dy}{dx} = X(x,y)$.

Cosa possiamo ricavare?

Idea di base

Idea di base: i sistemi discreti sono in genere più complicati di quelli "differenziali"!!!

A questo livello non è semplice definire cosa sia un sistema dinamico (differeziale): possiamo però di che
Un sistema dinamico differenziale è un'equazione differenziale ordinaria assieme all'insieme delle sue soluzioni, detto anche *flusso*.
Mentre *un'equazione differenziale ordinaria è una relazione funzionale tra una funzione reale di variabile reale e le sue derivate.*

Sistemi dinamici differenziali

Q. *Per capire l'andamento delle soluzioni, era veramente necessario risolvere l'equazione differenziale?*

In genere non si sanno risolvere le EDO!!!

Assumiamo un punto di vista diverso ...

Sistemi dinamici differenziali

Torniamo all'equazione logistica:

$$n'(t) = \kappa\, n(t) - h\, n(t)^2\,, \quad \text{con } h, \kappa \in \mathbb{R}\,,$$

quali sono gli aspetti centrali che possiamo ricavare dalle soluzioni?

Disegnare le soluzioni per tre diversi tipi di dati iniziali:

$$n(0) = 0\,, \quad n(0) = \xi \in]0, \kappa/h[\,, \quad n(0) = \kappa/h\,, \quad n(0) = \eta \in]\kappa/h, +\infty[\,.$$

Sistemi dinamici differenziali

Torniamo all'equazione logistica:

$$n'(t) = \kappa n(t) - h\, n(t)^2\,, \quad \text{con } h, \kappa \in \mathbb{R}\,,$$

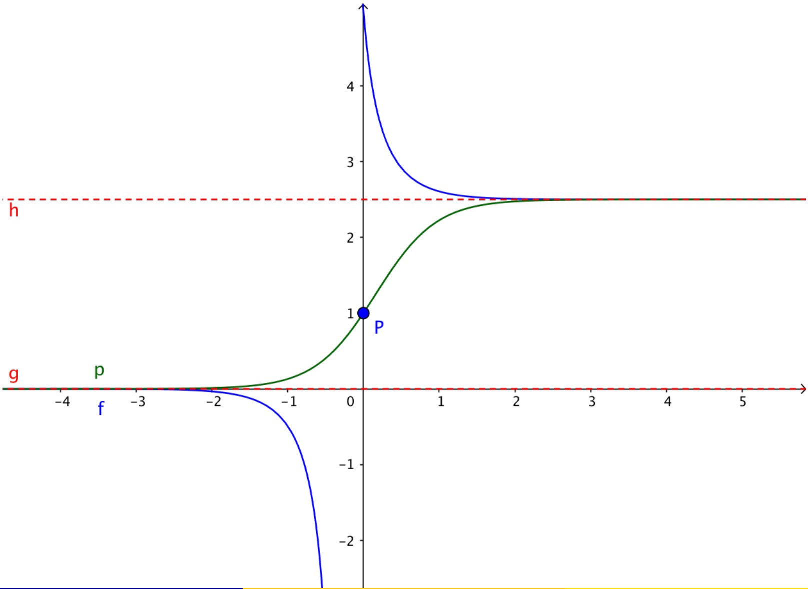
quali sono gli aspetti centrali che possiamo ricavare dalle soluzioni?

Disegnare le soluzioni per tre diversi tipi di dati iniziali:

$$n(0) = 0\,, \quad n(0) = \xi \in]0, h/\kappa[\,, \quad n(0) = h/\kappa\,, \quad n(0) = \eta \in]h/\kappa, +\infty[\,.$$

... ma per capire ciò serviva veramente integrare l'equazione differenziale?

Sistemi dinamici differenziali



Sistemi dinamici differenziali

... ma per capire ciò serviva veramente integrare l'equazione differenziale?

Sistemi dinamici differenziali

Forma compatta di un'EDO o sistema di EDO

$$\dot{z}(t) = X(z(t)) \tag{1}$$

con $z(t)$ lo stato del sistema ad un certo istante t.

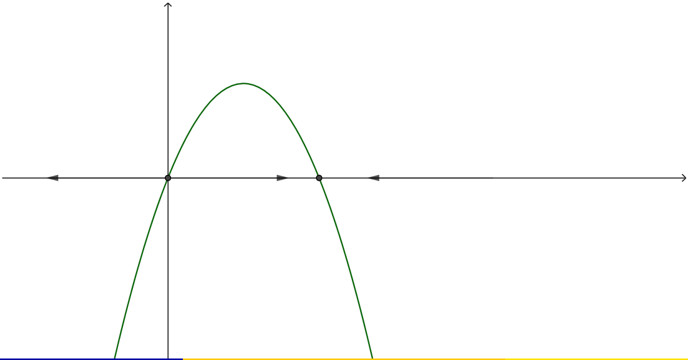
- $z \in M \subset \mathbb{R}^k$;
- $M =$ spazio delle fasi o spazio degli stati del sistema;
- $X : M \longrightarrow M$ campo vettoriale: *dà la velocità punto per punto.*

L'equazione (1) è una legge di evoluzione in M, fornisce informazioni sulla velocità in un certo stato.

Sistemi dinamici differenziali

Definizione

- Un'**orbita** di un campo vettoriale X o di un EDO (1) è l'immagine di una soluzione, orientata nel verso dei tempi crescenti.
- Il **ritratto in fase** di un campo vettoriale X (o di un EDO (1)) è l'insieme delle orbite del campo vettoriale.



Sistemi dinamici differenziali

Un ruolo speciale viene giocato dalle soluzioni stazionarie del campo vettoriale, assieme al fatto che

per un punto dello spazio delle fasi passa una e una sola orbita.

Se due orbite si intersecassero, infatti, il punto di intersezione sarebbe dato iniziale all'istante $t = 0$ di due diverse soluzioni, contro l'unicità.

Definizione

Chiamiamo **equilibri** o **stati stazionari** gli stati che annullano il campo vettoriale X.

Per cui gli equilibri "limitano" le orbite in alcuni regioni dello spazio delle fasi.

Esercizio

Aggiungiamo all'equazione logistica un prelievo constante $p > 0$. Cosa accade?

Sistemi dinamici differenziali

Osservazione

Alcune questioni date per scontate o taciate:

- esistenza delle soluzioni;
- unicità delle soluzioni;
- una soluzione non può arrivare ad un equilibrio in tempo finito: ma solo "tenderci";
- le soluzioni non partono da "ferme".

Integrazione numerica: RisolviEDO

Supponiamo ora di voler risolvere un problema più complesso, più interessante o più completo ...

- *Il sistema Preda–Predatore o sistema di Lotka–Volterra*
- *Il pendolo semplice*

Questi sono sistemi di EDO del primo ordine o nel caso del pendolo anche un'EDO del secondo ordine.
L'integratore di GeoGebra `RisolviEDO` permette di risolvere EDO del secondo ordine in maniera esatta nell'ambiente CAS (se possibile). Consideriamo l'EDO del secondo ordine

$$y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x)\,.$$

Per integrare scriviamo

```
RisolviEDO[equazione differenziale, variabile dipendente,
variabile indipendente, punto iniziale, velocità iniziale]
```

Cosa accade per il pendolo?

Integrazione numerica: RisolviEDO

In generale può essere più utile integrare numericamente, ossia cercare soluzioni approssimate!!!

L'integratore di GeoGebra `RisolviEDO` permette di integrare numericamente sia equazioni del primo ordine, che del secondo ordine che, con le necessarie modifiche anche sistemi di equazioni del primo ordine.

Integriamo **numericamente** l'equazione logistica:

$$\dot{z} = \kappa z - h z^2 , \quad z(0) = z_0 , \quad z \in \mathbb{R} ,$$

scrivendo nella vista `Algebra`:

$$\texttt{RisolviEDO[}\kappa z - h z^2 , \; x_0 , \; y_0 , \; x_f , \; \texttt{Passo]}$$

Integrazione numerica: RisolviEDO

Caveat!!!
Se si usa la vista CAS, i comandi sono leggermente diversi.

Caveat!!!
`RisolviEDO`, quando usato come integratore numerico, restituisce un luogo geometrico, da cui dobbiamo estrarre una lista di punti da disegnare:

- `Lunghezza[luogo]`, questo comando fornisce il numero di punto di cui è formato il luogo;
- `Primo[luogo,numero di punti]`, questo comando fornisce la lista di punti che formano il luogo.

In definitiva per estrarre il luogo `L1` dobbiamo scrivere

```
Primo[L1, Lunghezza[L1]]
```

Integrazione numerica: RisolviEDO

Integriamo **numericamente** l'equazione logistica:

$$\dot{z} = \kappa\, z - h\, z^2\,, \quad z(0) = z_0\,, \quad z \in \mathbb{R}\,,$$

scrivendo nella vista `Algebra`:

$$\texttt{RisolviEDO[}\kappa\, z - h\, z^2\,,\ x_0\,,\ y_0\,,\ x_f\,,\ \texttt{Passo]}$$

Cerchiamo soluzioni per $z(0) = 0$, $z(0) \in]0, \kappa/h[$, $z(0) = \kappa/h$ e $z(0) > \kappa/h$.

Confrontiamo poi le soluzioni numeriche con quelle esatte.

Integrazione numerica del modello logistico con `RisolviEDO`

Traccia della soluzione.

- Usare il comando di integrazione numerica di GeoGebra:

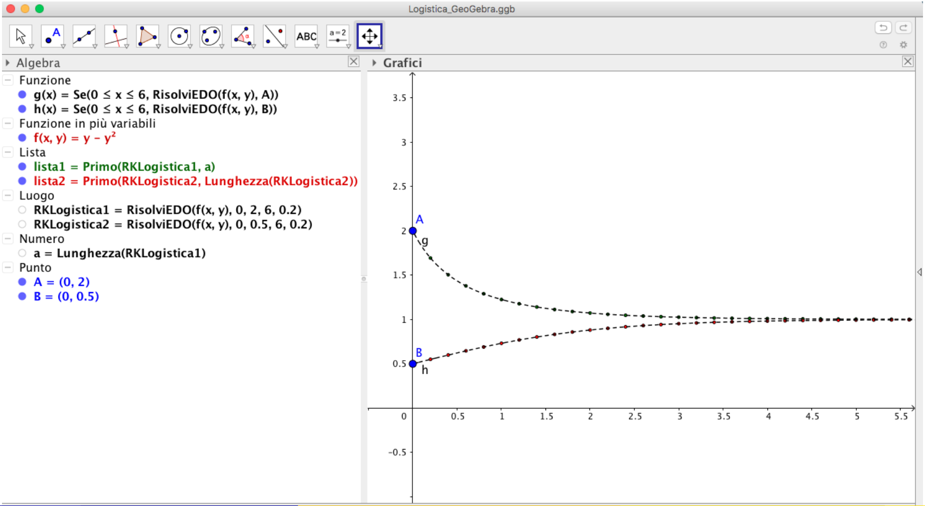
  `RisolviEDO[Campo vettoriale, x iniziale, y iniziale, x finale, Passo]`

  Conviene dare un nome al luogo geometrico definito dall'integratore.
- Utilizzare il comando `Lunghezza[Luogo]` per determinare il numero di punti che appartengono al luogo.
- Digitare il comando

  `Primo[Luogo, Numero elementi della lista]`

  per estrarre la lista dei punti che formano il luogo e disegnare così la soluzione numerica.

Integrazione numerica del modello logistico con `RisolviEDO`



Integrazione numerica: RisolviNEDO

GeoGebra possiede anche un integratore numerico specifico per sistemi di EDO:

RisolviNEDO[Lista derivate, x_0, $\{y_1(0), y_2(0), \ldots, Y_n(0)\}$, x_f]

Esercizio: il pendolo

Scrivere l'equazione del pendolo come sistema di equazioni del primo ordine e poi integrare numericamente tale sistema di EDO.

RisolviNEDO: il pendolo

Esercizio: il pendolo

Scriviamo l'equazione del pendolo $y'' = -\kappa^2 \sin y$ come sistema di EDO del primo ordine

$$y1'(t, y1, y2) = y2\,, \quad y2'(t, y1, y2) = -\kappa^2 \sin(y1)\,.$$

Usiamo ora l'integratore:

RisolviNEDO[{$y1'$, $y2'$}, -5, {pos. iniziale, vel. iniziale}, 5]

RisolviNEDO: il pendolo

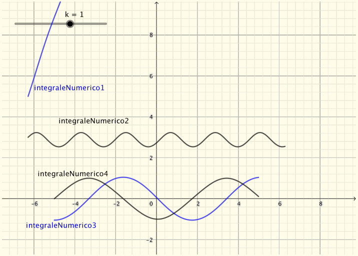
Esercizio: il pendolo

Scriviamo l'equazione del pendolo $y'' = -\kappa^2 \sin y$ come sistema di EDO del primo ordine

$$y1'(t, y1, y2) = y2\,, \quad y2'(t, y1, y2) = -\kappa^2 \sin(y1)\,.$$

Usiamo ora l'integratore:

RisolviNEDO[{$y1'$, $y2'$}, -5, {pos. iniziale, vel. iniziale}, 5]



RisolviNEDO: il sistema di Lotka–Volterra

Esercizio: il sistema preda–predatore

Integrare numericamente il sistema preda–predatore

$$\dot{x} = (\alpha - \beta\, y)x\,, \quad \dot{y} = -(\gamma - \delta\, x)y\,,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Tale sistema due popolazioni: prede x e predatori y. In assenza di predatori, le prede crescono a tasso costante α (crescita esponenziale o malthusiana). Similmente in assenza di prede i predatori decrescono con tasso costante e negativo $-\gamma$.
Nel modello di Lotka–Volterra l'interazione fra le due popolazioni viene descritta da variazioni dei due tassi di crescita: la probabilità che un dato predatore incontri una preda è proporzionale al numero delle prede e moltiplicando per il numero dei predatori.

Integrazione numerica: RisolviNEDO

non abbiamo un gran controllo!!!!!!
e non si capisce un granchè

$\Downarrow$

proviamo a costruirci un integratore e disegnamo le orbite!!!

Il metodo di Euler

Si vuole integrare numericamente

$$z'(t) = X(z(t), t)\,, \quad z(t_0) = z_0$$

Idea semplice ... la soluzione che all'istante $t = t_0$ si trova nello stato $z(t_0)$, all'istante successivo $t_0 + h$, si troverà nello stato $z(t_0) + h\,X(z(t_0))$. Iterando questo processo, all'n–esimo istante $t_n = t_0 + nh$, la soluzione si troverà in $z(t_{n-1}) + h\,X(z(t_{n-1}))$.

h = incremento o passo d'integrazione: è la larghezza dell'intervallo temporale lungo cui si effettua l'approssimazione.

Da un punto di vista grafico ... in ogni intervallo $[t_j, t_{j+1}]$ di ampiezza h, si segue la direzione della tangente invece che la traiettoria vera uscente da (t_j, z_j).

Sperimentiamo con l'equazione logistica e poi confrontiamo con i risultati ottenuti con gli altri metodi ...

Integrazione numerica dell'equazione logistica col metodo di Euler

Esercizio

Si consideri l'equazione logistica:

$$n'(t) = \kappa\, n(t) - h\, n(t)^2\,. \tag{2}$$

Integrazione numerica dell'equazione logistica con condizioni iniziali: $n(0) > \kappa/h$, $n(0) \in]0, \kappa/h[$ $n(0) = 0$ e $n(0) = \kappa/h$.

1. Usare il metodo di Euler.
2. Far variare il dato iniziale e determinare più soluzioni, confrontandole con le relative soluzioni esatte.

Integrazione numerica dell'equazione logistica col metodo di Euler

Traccia della soluzione dell'integrazione numerica dell'equazione logistica con il metodo di Euler.

1. - Determinare il punto A che fissa le condizioni iniziali $A = (0, y_0)$.
   - Definire il campo vettoriale

     $$X(x, y) := \kappa\, y - h\, y^2 \,.$$

   - Scrivere il comando che risolve il problema di Cauchy (4):[1]

     `RisolviEDO[Campo vettoriale, Punto iniziale].` [2]

     Cosa osserviamo?
   - Per ottenere un risultato migliore cosa proponente?
   - Disegnare gli equilibri (tratteggiati).

[1] Possiamo usare sia la vista Algebra che CAS.

[2] Il campo vettoriale va scritto come funzione di x e y, come indicato in precedenza.

Integrazione numerica dell'equazione logistica col metodo di Euler

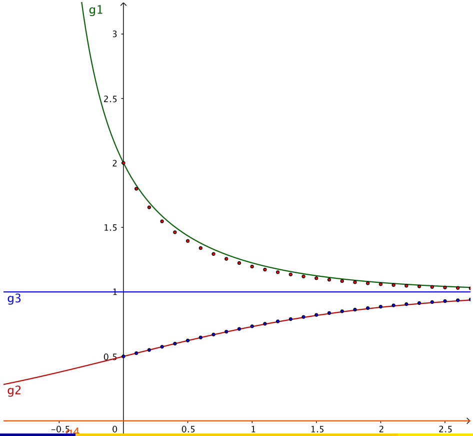
2. Passiamo ora all'integrazione numerica con il metodo di Euler.
   - Attivare la vista `Foglio di Calcolo`: dal menù in alto selezionare `Visualizza` e selezionare poi la voce `Foglio di Calcolo`.
   - Definire uno slider s (= passo d'integrazione) con estremi da 0 a 0.5 e passo 0.01
   - Nella colonna A scriveremo i dati relativi alla variabile x, nella colonna B i dati relativi alla y e nella colonna C il punto di coordinate la x e la y a lato. Nelle celle $A2$ e $B2$ scriviamo le coordinate del punto iniziale. Nella cella $C2$ scriviamo il punto $(A2, B2)$.
   - Nella cella $A3$ scrivere il tempo (x) incrementato di s, nella cella $B3$ scrivere la prima iterazione del metodo di Euler:

$$B2 + s\,(1 - B2)B2\,.$$

   - Scrivere nella cella $C3$ il punto $(A3, B3)$.
   - Selezionare le celle A3, B3 e C3 e quindi trascinare verso il basso per almeno 20 celle.
   - Abbellire e rendere leggibile il grafico.

Integrazione numerica dell'equazione logistica col metodo di Euler

3. Ripetere ora il tutto per le altre condizioni iniziali $(0, y_0)$, con $y_0 \in]0, \kappa/h[$, e i due equilibri.
4. Abbellire il grafico.



Integrazione numerica del oscillatore col metodo di Euler

Esercizio: l'oscillatore armonico

Iniziamo integrando numericamente con il metodo di Euler, l'oscillatore armonico:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \,. \tag{3}$$

Scriviamo la (3) come sistema del primo ordine

$$\dot{x} = y \,, \qquad \dot{y} = -\omega^2 x \,.$$

A questo punto disegnamo numericamente le orbite del sistema.

Integrazione numerica dell'oscillatore armonico col metodo di Euler

Traccia della soluzione.

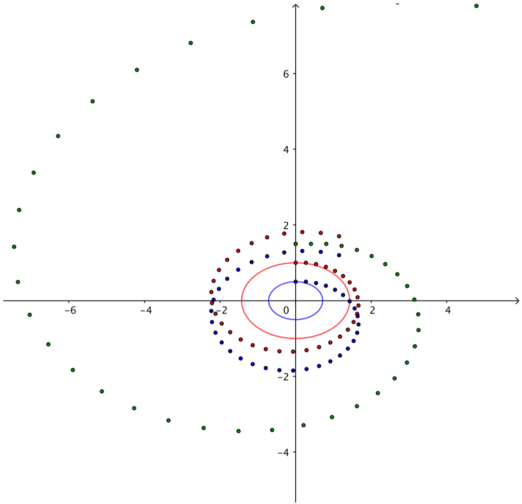
1. Definire il campo vettoriale

$$Xx(x,y) = y\,, \quad Xy(x,y) = -\omega^2\, x\,.$$

2. definire uno slider h per il passo d'integrazione.
3. Aprire il Foglio di Calcolo: nella cella $A2$ scrivere il valore iniziale della coordinata x, nella cella $B2$ il valore iniziale della coordinata y e nella cella $C3$ il punto $=(A2, B2)$.
4. Nella cella $A3$ applicare il metodo di Euler per la componente x del campo $(= A2 + h\, Xx(C2))$.
5. Analogamente per la componente y del campo vettoriale.
6. Trascinare.

Cosa si osserva?

Integrazione numerica dell'equazione dell'oscillatore armonico col metodo di Euler



Integrazione numerica del modello preda–predatore col metodo di Euler

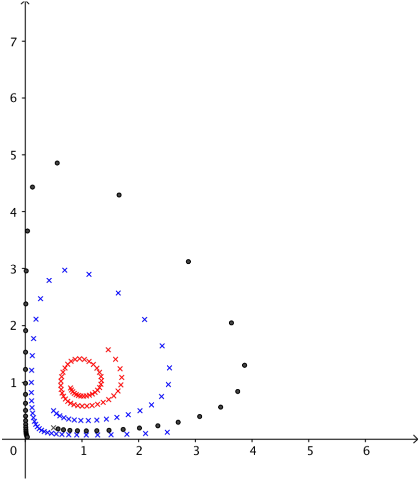
Esercizio: il sistema preda–predatore

Determinare numericamente con il metodo di Euler le orbite del sistema preda–predatore:

$$\dot{x} = (\alpha - \beta\, y)x\,, \quad \dot{y} = -(\gamma - \delta\, x)y\,,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

Integrazione numerica del modello preda–predatore col metodo di Euler



Integrazione numerica dell'equazione del pendolo col metodo di Euler

Esercizio: il pendolo

Determinare numericamente con il metodo di Euler le orbite dell'equazione del pendolo

$$\ddot{\theta} = -\kappa^2 \sin\theta \,.$$

Il metodo di Runge–Kutta di ordine 2 o di Euler modificato

- Metodo di Euler: in ogni intervallo $[z_k, z_{k+1}]$ si segue la tangente nel punto iniziale dell'intervallo
- Metodo di Euler modificato o Runge–Kutta di ordine 2: in ogni intervallo $[z_k, z_{k+1}]$ si segue una tangente vicina alla tangente nel punto medio:

Vogliamo integrare numericamente l'EDO

$$\dot{z}(t) = X(t, z(t)) \quad z(t_0) = z_0 \,.$$

Consideriamo un incremento finito $h > 0$, allora lo stato all'istante t_{n+1} si scrive in funzione dello stato precedente:

$$z_{n+1} = z_n + h\, X\left(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2} X(t_n, z_n)\right) \,.$$

Integrazione numerica con il metodo di Runge–Kutta o Euler modificato

N.B.

- Per cambiare l'arrotondamento usato di default da GeoGebra, cliccare sul menù opzioni e sul sottomenù arrotondamento, scegliendo l'arrotondamento desiderato.
- Per nascondere le etichette dei punti disegnati, cliccare (con il pulsante destro del mouse) sulla colonna dei punti sul foglio di calcolo (ad es. la colonna C) e poi disattivare la voce attiva/nascondi etichette.
- Per variare le proprietà dei punti (colore, forma, grandezza, etc.) cliccare sulla colonna dei punti (con il pulsante destro del mouse) come in precedenza, successivamente sul menù a tendine selezionare la voce *proprietà*. Da lì si accede alle differenti proprietà.

Integrazione numerica del modello logistico col metodo di Euler modificato

Esercizio

Si consideri l'equazione logistica:

$$n'(t) = \kappa\, n(t) - h\, n(t)^2 \,. \tag{4}$$

Integrazione numerica dell'equazione logistica con condizioni iniziali: $n(0) > \kappa/h$, $n(0) \in]0, \kappa/h[$, $n(0) = 0$ e $n(0) = \kappa/h$.

1. Usare il metodo di Euler modificato.
2. Far variare il dato iniziale e determinare più soluzioni, confrontandole con le relative soluzioni esatte e con quelle di Euler.

Integrazione numerica del modello logistico con il metodo di Runge–Kutta

Traccia della soluzione.

1. Scrivere le componenti del campo vettoriale (basta sulla vista algebrica, senza il $:=$, se si vuole scrivere su CAS usare il $:=$).
2. Aprire il foglio di calcolo di GeoGebra e nelle celle $A2$ e $B2$ le condizioni iniziali per la x e per la y e sulla cella $C2$ il punto $(A2, B2)$.
3. Definire il passo d'integrazione usando uno slider.
4. Sulla cella $A3$ scrivere la componente x dell'iterazione:
5. Sulla cella $B3$ scrivere la componente y dell'iterazione ... analogamente a sopra ...
6. Sulla cella $C3$ scrivere il punto determinato ... $(A3, B3)$.
7. Trascinare le tre celle ...
8. Ripetere il tutto per vari dati iniziali.

Integrazione numerica del modello logistico con il metodo di Runge–Kutta

N.B.

- Per cambiare l'arrotondamento usato di default da GeoGebra, cliccare sul menù opzioni e sul sottomenù arrotondamento, scegliendo l'arrotondamento desiderato.
- Per nascondere le etichette dei punti disegnati, cliccare (con il pulsante destro del mouse) sulla colonna dei punti sul foglio di calcolo (ad es. la colonna C) e poi disattivare la voce attiva/nascondi etichette.
- Per variare le proprietà dei punti (colore, forma, grandezza, etc.) cliccare sulla colonna dei punti (con il pulsante destro del mouse) come in precedenza, successivamente sul menù a tendine selezionare la voce *proprietà*. Da lì si accede alle differenti proprietà.

Integrazione numerica dell'equazione dell'oscillatore armonico col metodo di Euler modificato

Esercizio: orbite dell'OA

Determiniamo numericamente le orbite dell'equazione dell'oscillatore armonico:

$$\dot{x} = y \,, \qquad \dot{y} = -\omega^2 \, x \,.$$

Sistemi dinamici differenziali

Definizione