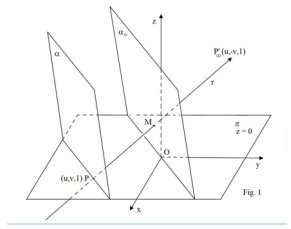
MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso - Redazione: Luciano Corso, Elisabetta Capotosto, Carlo Marchiori – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel e fax (045) 8344785 – 338 6416432
e-mail: lcorso@iol.it – Stampa in proprio – Numero 138 – aprile 2009 – Uscito il 18 – 05 - 2009



Ottimizzazione dell'instradamento periodico dei veicoli in un caso reale

di Mauro Portone * & Chefi Triki *

La gestione dei trasporti rappresenta un'importante parte dell'intero sistema logistico di una azienda pubblica o privata, in quanto determina una quota rilevante del costo di gestione totale, e non influisce soltanto sui bilanci delle aziende, ma influenza anche e in larga parte, i prezzi delle merci o le tariffe.

In quest'articolo, si vuole prendere in analisi il *Problema di Distribuzione*, che consiste nell'ottimizzare l'uso di un insieme di veicoli a capacità limitata, il cui servizio si articola in una serie di fermate atte a prelevare e/o consegnare merci o trasportare persone.

Un'azienda di distribuzione di carburanti che opera nel Salento ha la necessità di rifornire settimanalmente i propri distributori dettaglianti. Essendo tali centri di distribuzione dislocati in diverse città della provincia di Lecce, è particolarmente importante per l'azienda, riuscire a gestire il trasporto della merce in modo efficiente e rapido, rifornendoli della quantità di carburante richiesta settimanalmente. È dunque conveniente analizzare nei dettagli il problema, al fine di trovare una soluzione ottima che permetta il rifornimento dei distributori, minimizzando i costi che l'azienda è costretta a sostenere in questo aspetto del suo lavoro. L'azienda ha la possibilità di conservare una ingente quantità di carburante in un deposito di sua proprietà, dove si depositano anche gli automezzi adibiti al trasporto dei carburanti. L'obiettivo sarà quindi quello di determinare le rotte che i veicoli devono percorrere giornalmente, partendo dal deposito e ritornandovi dopo aver effettuato il loro servizio di rifornimento, facendo in modo che la somma delle distanze percorse sia minima.

Le città nelle quali sono presenti i distributori sono in totale 30. Possiamo rappresentare le città come nodi logistici e ricavare, dalle reti stradali (Figura 1), il grafo connesso $G(N, E)$ con N l'insieme dei distributori installati nelle diverse città ed E l'insieme dei percorsi stradali più brevi, che li congiungono (Figura 2).

Figura 1: Rete stradale

Il grafo è connesso in quanto esiste sempre un percorso stradale che collega tra loro due città che sono associate ai

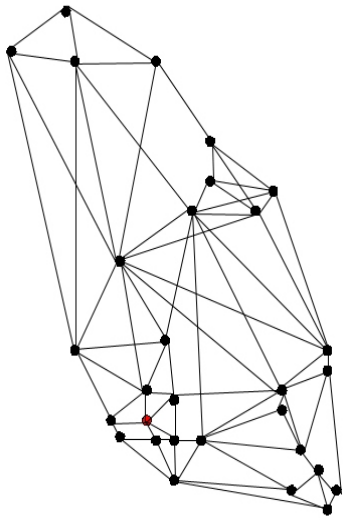


Figura 2: Grafo connesso

nodi. Inoltre associamo ad ogni arco, cioè strada di collegamento, un peso che chiameremo c_{ij}, corrispondente alla distanza tra le città collegate. Il grafo diventerà quindi un grafo pesato. Come già detto, l'azienda ha di sua proprietà una flotta di autoveicoli che risulta essere non omogenea, infatti ogni camion ha una sua portata massima che varia da 7000 a 21000 litri.

Essendo la domanda che perviene dai distributori, variabile periodicamente, seguendo anche un andamento stagionale soprattutto presso quelle città in cui è molto sviluppato il turismo, procederemo a risolvere il problema relativo ad una generica settimana. Le domande dei distributori da considerare in questa applicazione sono comprese tra un valore minimo di 4000 litri ed uno massimo di 44800 litri (per i valori dettagliati si rimanda al riferimento [1]).

Il problema appena descritto rappresenta un tipico problema di instradamento di veicoli periodico. Questo problema è caratterizzato da un livello decisionale duplice: è necessario per primo assegnare i clienti da servire ai giorni lavorativi per poi risolvere il problema dell`instradamento per ogni giorno della settimana. Tale problema, introdotto nel 1984 da Christofides e Beasley, è noto per essere NP-Difficile [2, 3, 4, 5]. Inoltre, occorre tener presente che il problema deve essere risolto periodicamente, aggiornando i dati in base alle domande pervenute e ad altri eventuali cambiamenti. Di conseguenza il tempo di soluzione deve essere mentenuto ragionevolmente breve. Per questo motivo abbiamo optato per l`utilizzo di un approccio di soluzione ibrido. In particolare, la suddivisione dei clienti da servire rispetto ai giorni lavorativi sarà risolto in maniera euristica utilizzando un semplice metodo *greedy*. Invece la soluzione del risultante problema di instradamento dei veicoli, relativo al giorno della settimana (considerando cioè soltanto il sottoinsieme dei clienti da servire in ciascun giorno, decisi sulla base del metodo greedy) sarà calcolata in maniere esatta.

Metodo Greedy: consiste nell'analizzare i valori delle domande, rilevando le posizioni dei vari nodi nel grafo, e considerando che alcuni distributori hanno bisogno di essere rifor-

niti anche più volte all'interno della stessa settimana.

Metodo Esatto: consiste nello sviluppare il modello matematico che sarà quindi risolto ogni giorno, associando i dati relativi al servizio quotidiano necessario a soddisfare la domanda dei distributori. Quindi variando giorno per giorno il numero di distributori da raggiungere, nella soluzione potrà anche variare il numero di veicoli impiegati. In particolare, tale problema può facilmente essere ricondotto ad un problema generale di *Vehicle Routing Problem*, con clienti sui vertici, i cui parametri sono i seguenti:

- N insieme dei nodi da visitare ($|N|=n$ variabile per ogni giorno);
- E insieme degli spigoli (percorsi stradali che collegano i nodi);
- $NV=14$ numero dei veicoli disponibili
- Q_v capacità massima di carico del veicolo v
- D_i domanda associata al distributore i
- c_{ij} distanza relativa all'arco i-j

Le variabili di decisione saranno quindi:

$$\begin{cases} x_{ijv} = 1 & se\ i-j\ fa\ parte\ della\ rotta\ servita\ dal\ veicolo\ v \\ x_{ijv} = 0 & altrimenti \end{cases}$$

Il modello matematico risulta essere come segue:

FUNZIONE OBIETTIVO:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{v=1}^{NV} c_{ij} x_{ijv}$$

che rappresenta la somma delle distanze percorse da tutti i veicoli nelle rotte attraverso tutti i nodi di servizio, e deve essere minimizzata.

VINCOLI:

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{v=1}^{NV} x_{ijv} = 1 \qquad j = 2,\dots,n \qquad (1)$$

assicura che per ogni nodo j (escluso il deposito, indicato con il nodo 1), la rotta relativa a questo vertice è caratterizzata da un solo veicolo entrante in esso ;

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{v=1}^{NV} x_{ijv} = 1 \qquad i = 2,\dots,n \qquad (2)$$

assicura che per ogni nodo i, la rotta relativa a questo vertice è caratterizzata da un solo veicolo uscente da esso ;

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ipv} - \sum_{j=1}^{n} x_{pjv} = 0 \quad v = 1,\dots,NV \quad p = 1,\dots,n \qquad (3)$$

esprime la necessità che ogni veicolo che entra in un nodo di servizio p deve anche uscirne. Questi vincoli insieme ai vincoli (1) rendono ridondanti i vincoli (2);

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ijv} \right) \le Q_v \quad v = 1,\dots,NV \qquad (4)$$

impedisce il caso che un veicolo possa eccedere la sua portata massima Q_v;

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1jv} \le 1 \qquad v = 1,\dots,NV \qquad (5)$$

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1v} \le 1 \qquad v = 1,\dots,NV \qquad (6)$$

assicura che per ogni veicolo v, ci sia al più un solo arco uscente e al più un solo arco entrante nel deposito. I vincoli (5) con i vincoli (3) rendono ridondanti i vincoli (6).

$$\sum_{i\in J}\sum_{u\in J} x_{ijv} \le |J| - 1 \quad \forall J \subseteq N,\ |J| \ge 2 \quad v = 1,..,NV \qquad (7)$$

tali vincoli impediscono la formazione di sottocicli all'interno di ogni rotta, quindi ogni rotta ha origine e termine nel nodo 1 (deposito).

$$x_{ijv} \in \{0,1\} \qquad i,j = 1,\dots,n \quad v = 1,\dots,NV \qquad (8)$$

stabiliscono che le variabili di decisione siano binarie, cioè 0 oppure 1.

Partendo ora da questo modello matematico, è possibile implementare un programma (utilizzando il pacchetto software LINGO) che permetterà di risolvere (in pochi secondi) quotidianamente il problema relativo all`instradamento dei veicoli per il rifornimenti della quantità di carburante necessaria ai distributori.

Vediamo un esempio di soluzione per un giorno della settimana: nel giorno la cui soluzione è rappresentata in Figura 3, vengono a formarsi 4 rotte così definite: il veicolo 6 rifornisce i nodi 12 e 13, il veicolo 14 rifornisce il solo nodo 21, il veicolo 1 rifornisce il solo nodo 28 e il veicolo 2 rifornisce i nodi 29 e 16.

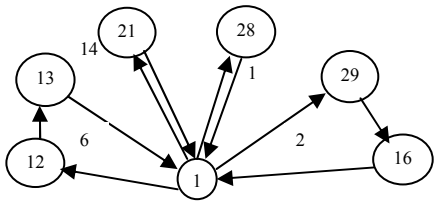


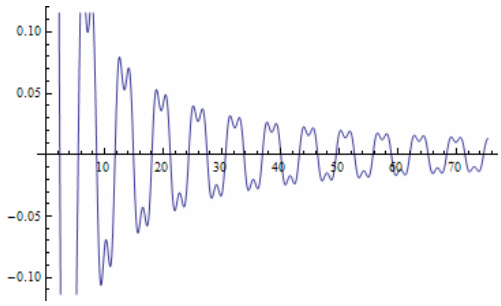
Figura 3: Soluzione relativa ad un giorno

Dal calcolo della distanza percorsa nell'arco della settimana considerata, si nota che, nelle rotte calcolate con il metodo proposto, il costo totale è pari a 1158 km percorsi; inoltre in tutto l'arco della settimana si è avuto l'utilizzo complessivo di 7 veicoli per il trasporto del carburante ai distributori. Mentre considerando le rotte adottate dall'azienda riferite agli stessi dati utilizzati nel modello, risulta che la distanza percorsa in media in tutta la settimana per rifornire tutti i distributori della quantità di merce necessaria, è stata di 1532 km, con l'utilizzo complessivo di 10 veicoli.

Da questo si può concludere che, la soluzione trovata tramite il metodo proposto (approccio greedy e modello matematico) è una soluzione migliore di quella adottata fin ora dalla azienda, e comporta una riduzione del costo di servizio nel trasporto della merce di circa il 24% e una riduzione del costo di gestione dei veicoli utilizzati di circa il 30%. Possibili sviluppi futuri possono riguardare l`utilizzo di metodi avanzati per l`assegnamento dei clienti ai giorni della settimana oppure lo sviluppo di un metodo integrato che risolva i due problema contestualmente.

Riferimenti bibliografici: [1] M. Portone (2004), *Modelli per l'ottimizzazione del'instradamento dei veicoli in un caso reale*, Tesi di Laurea, Universita` del Salento. [2] N. Christofides, J. E. Beasley (1984). *The period routing problem*, Networks 14, pp. 237-256. [3] J.-F. Cordeau, M. Gendreau, G. Laporte (1997), *A tabu search heuristic for periodic and multi-depot vehicle routing problems*. Networks 30, 105-119. [4] M. Gaudioso, G. Paletta (1992), *A heuristic for the periodic vehicle routing problem*. Transportation Science, 26, pp. 86-92. [5] I-M. Chao, B. L. Golden, E. Wasil (1995). *An improved heuristic for the period vehicle routing problem*, Networks. 26, pp. 25-44.

[*] Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi", Università del Salento – Lecce. Email: *mauroportone@libero.it – chefi.triki@unile.it*



Programma con MATHEMATICA:

```
Plot[(Sin[x]^3+Cos[x]^3)/x,{x,0,24 Pi}]
```