



Publicazione mensile di proprietà dell'Associazione Mathesis di Verona, per le Scienze Matematiche pure e applicate – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Sisto Baldo, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Bruno Stecca, Andrea Sellaroli – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel. 338 6416432 – e-mail: [info@mathesis.verona.it](mailto:info@mathesis.verona.it) – [lcorso@iol.it](mailto:lcorso@iol.it) – Stampa in proprio – Numero 300 – Pubblicato il 13 - 09 - 2022

## ESPONENZIALMENTE

Luca Granieri <sup>[\*]</sup>, Francesco Sciannimanico <sup>[\*\*]</sup>

[Segue dal numero 299]

Sui numeri razionali  $q = n/m$  abbiamo che

$$y(q) = y\left(\frac{n}{m}\right) = y\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}\right) = \\ = y\left(\frac{1}{m}\right) \dots y\left(\frac{1}{m}\right) = y\left(\frac{1}{m}\right)^n.$$

In particolare, da queste argomentazioni segue che  $e > 0$ . Infatti, essendo  $y(0) = 1$ , per la permanenza del segno delle funzioni continue, la  $y(x)$  è positiva in un intorno dell'origine, e quindi  $y(1/m) > 0$  per un  $m$  abbastanza grande. Ma allora

$$y(1) = y\left(m \cdot \left(\frac{1}{m}\right)\right) = y\left(\frac{1}{m}\right)^m > 0.$$

D'altra parte,  $y(1/m)^m = y(1) = e \Rightarrow y(1/m) = \sqrt[m]{e}$ . In altre parole, per un numero razionale  $q = n/m$  si ha

$$y(q) = \sqrt[m]{e^n} = e^{\frac{n}{m}} = e^q.$$

Infine, dato che ogni numero reale si può approssimare con numeri razionali (se vogliamo proprio per definizione di numero reale) per  $x \in \mathbb{R}$  abbiamo che  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$  per una successione di razionali  $q_n \in \mathbb{Q}$ . Trattandosi di una funzione continua abbiamo

$$y(x) = y\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y(q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{q_n}.$$

Pertanto, la nostra funzione  $y(x)$  è proprio estensione (l'unica estensione) dell'usuale funzione potenza ai numeri reali. Siamo in questo modo *autorizzati* ad introdurre la notazione  $y(x) = e^x$ .

Dalla proprietà di permanenza del segno del limite segue che  $y(x) > 0$ . Essendo allora  $y' = y > 0$  si tratta di una funzione strettamente crescente. Segue allora che  $e = y(1) > y(0) = 1$ . Abbiamo allora che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . Segue immediatamente anche che  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . Infine, essendo  $y'' = (y')' = y' = y > 0$  abbiamo una funzione strettamente convessa il cui grafico è in figura 1.

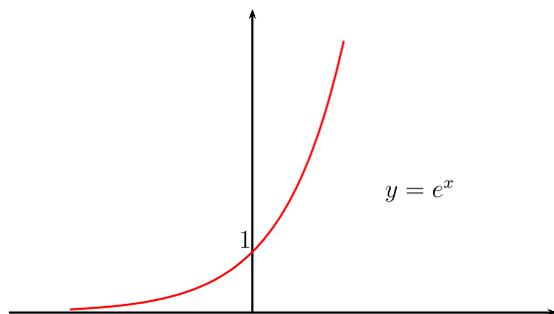


Figura 1. Funzione esponenziale

## 2. Costruzione della funzione esponenziale

Una possibile costruzione per verificare l'esistenza di una fun-

zione che sia invariante per derivazione si può ottenere per *approssimazioni successive*. Partiamo dalla condizione iniziale considerando  $y_0(x) = 1$ . Passando alla derivata questa condizione si perde e per conservarla ci basta aggiungere una primitiva di  $y_0$ , considerando cioè la funzione  $y_1(x) = y_0(x) + x = 1 + x$ . Ora abbiamo in cassaforte la condizione iniziale ma per conservare il termine in più occorre aggiungere una primitiva di  $y_1(x)$  e quindi considerare la funzione  $y_2(x) = y_0(x) + x + x^2/2$ . Similmente si possono considerare  $y_3(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$  e così via. Le iterate generiche del procedimento danno luogo all'espressione

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t) dt. \quad (3)$$

I lettori esperti avranno riconosciuto in queste espressioni lo sviluppo in serie di Taylor o le iterate successive del metodo di Picard per la determinazione di un punto fisso. Tornando a noi, se ammettiamo, a titolo di euristica, che  $y_n \rightarrow y$ , passando al limite nella (3) si otterrebbe

$$y(x) = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x y_n(t) dt. \quad (4)$$

Ancora, proseguendo la nostra euristica, se si potessero *commutare* tra loro i simboli di limite ed integrale, ovvero *passare al limite sotto il segno di integrale*, allora otterremmo l'equazione  $y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$  e derivando si otterrebbe proprio l'equazione  $y' = y$ , restituendoci così l'agognata esistenza di soluzione del nostro problema di Cauchy. Tuttavia, non è difficile vedere che senza condizioni aggiuntive il passaggio al limite sotto il segno di integrale fallisce.

**Esercizio 2.1.** *Mostrare che per le funzioni  $y_n(x)$  come in figura 2  $y_n \rightarrow 0$  ma il passaggio al limite sotto il segno di integrale non vale.*

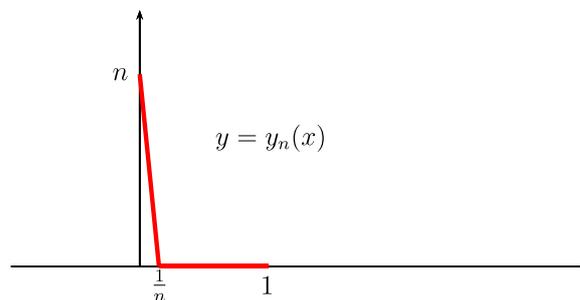


Figura 2. Controesempio per il passaggio al limite sotto il segno di integrale

Soluzione. Le funzioni  $y_n(x)$  hanno la seguente espressione analitica

$$y_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Ora, fissato  $x \in ]0, 1]$ , scelto  $n > 1/x$  risulta  $y_n(x) = 0$ . Quindi abbiamo che  $y_n(x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Mentre per  $x = 0$  risulta

$y_n(x) = n$  e pertanto  $y_n(x) \rightarrow +\infty$ . Ma un singolo valore non influisce sul calcolo di un integrale e pertanto potremo ignorare o se vogliamo ridefinire arbitrariamente il valore delle  $y_n(0)$ . Abbiamo pertanto

$$\int_0^1 y_n(x) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 y_n(x) dx$$

$$\neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x) dx = 0. \quad \square$$

Alla luce del controesempio occorre approfondire le possibilità di scambiare tra loro i simboli di limite e di integrale. In generale, come pure la questione di *commutare* segni di integrale, di derivazione ecc. tra loro, si tratta di una questione delicata e di primaria importanza. In questo caso specifico è comunque possibile dire qualcosa. Se infatti volessimo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b y_n(x) dx = \int_a^b y(x) dx$$

con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x) = y(x)$ , dovremmo verificare che, fissato  $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_a^b y_n(x) dx - \int_a^b y(x) dx \right| < \varepsilon$$

per  $n \geq N$ . Ma il primo membro si stima tramite le proprietà dell'integrale

$$\left| \int_a^b y_n(x) dx - \int_a^b y(x) dx \right| = \left| \int_a^b (y_n(x) - y(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |y_n(x) - y(x)| dx.$$

Ora, è vero che la distanza tra  $y_n(x)$  e il limite  $y(x)$  deve essere piccola, ma tale distanza potrebbe variare da punto a punto e non c'è garanzia che anche il corrispondente integrale si mantenga piccolo. A meno che tale *piccolezza* non valga *uniformemente* per tutto l'intervallo  $[a, b]$ . Diamo allora la definizione

$$y_n \rightarrow y \text{ uniformemente} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \text{ tale che}$$

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a, b]: |y_n(x) - y(x)| < \varepsilon.$$

Pertanto, la nozione di *convergenza uniforme* è sufficiente per passare al limite sotto il segno di integrale. Infatti, ripercorrendo quanto osservato

$$\int_a^b |y_n(x) - y(x)| dx < \varepsilon(b - a)$$

per  $n \geq N$ .

In effetti, nel controesempio considerato la convergenza  $y_n \rightarrow 0$  non è uniforme giacché l'indice per cui vale  $y_n < \varepsilon$  dipende dal valore di  $\varepsilon$  fissato e dal punto  $x \in [0, 1]$  considerato. Cosa succede invece per la nostra approssimazione della funzione esponenziale? Intanto dobbiamo verificarne la convergenza. A tal fine potremmo indagare la condizione di Cauchy ricordando che la *completezza* di  $\mathbb{R}$  si può esprimere dicendo che *ogni successione di Cauchy è convergente*. Dobbiamo pertanto mostrare che gli elementi della  $y_n$  sono arbitrariamente vicini tra loro da un certo indice in poi. Per  $x \in [0, K]$  valutiamo che

$$y_{n+h}(x) - y_n(x) =$$

$$= \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n+h}}{(n+h)!} \right) - \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + \frac{x^{n+h}}{(n+h)!} \leq h \frac{K^{n+h}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

per i noti limiti notevoli di confronto fra potenze e fattoriali (si veda l'esercizio 3).

**Esercizio 3.** verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K^n}{n!} = 0.$$

*Soluzione.*

$$\frac{K^n}{n!} = \frac{K}{1} \cdot \frac{K}{2} \cdot \frac{K}{K-1} \cdot \frac{K}{K} \cdot \frac{K}{K+1} \cdot \dots \cdot \frac{K}{n-1} \cdot \frac{K}{n} \leq K^{k-1} \cdot \frac{K}{n}$$

$$= \frac{K^k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Il calcolo appena fatto ci dice che la  $y_n$  soddisfa la condizione di Cauchy e quindi essa ammette limite  $y_n(x) \rightarrow y(x)$ . Inoltre, tale condizione è addirittura soddisfatta uniformemente giacché, fissato  $\varepsilon > 0$ , possiamo scegliere l'indice  $N$  in modo che

$$h \frac{K^{n+h}}{(n+1)!} < \varepsilon \text{ per } n \geq N.$$

Ne consegue che, quale che sia  $x \in [0, K]$ , risulta  $y_{n+h}(x) - y_n(x) < \varepsilon$ . Passando al limite per  $h \rightarrow +\infty$  si ottiene  $|y(x) - y_n(x)| < \varepsilon$ , vale a dire che  $y_n \rightarrow y$  uniformemente.

Passando allora al limite sotto il segno di integrale nella (4) abbiamo che  $y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$ , da cui  $y' = y$  in  $[0, K]$ . Dall'arbitrarietà di  $K$  la funzione  $y$  resta definita nell'intero  $\mathbb{R}$ .

Per correttezza, tornando alla scatenata festa delle funzioni elementari, segnaliamo che c'erano anche altre funzioni sole solette in disparte, tipo  $y = \sin(x)/x$  o  $y = e^{x^2}$  perché si sa, *loro non si integrano facilmente!* Ma questa volta per poter sorridere occorre una conoscenza più approfondita dell'analisi matematica.

**Riferimenti bibliografici:** [B.1] L. Granieri, *Al ritmo del logaritmo*, Matematicamente, Mathesis Verona, n. 282-28 (2021). [B.2] L. Granieri, *Elementare Watson!*, LaDotta editore, 2018.

[\*], [\*\*] Liceo Scientifico E. Fermi, Bari. E-mail: granieriluca@libero.it; francescosc208@gmail.com.

## S-PARTITI:

### METODO PER LA COMPOSIZIONE DI BRANI MODULARI CON TECNICA COMBINATORIA

di Daniele Trucco [\*\*\*]

Qualche anno fa mi è capitato di sfogliare una curiosa pubblicazione per bambini intitolata *Estrambolici*<sup>[1]</sup>: il libro, di medie dimensioni e rilegato con anelli metallici, è composto tutto da pagine cartonate tagliate in 3 grandi strisce orizzontali così che in realtà ne nascano 3 libri sovrapposti del tutto indipendenti. Ogni striscia superiore ha disegnata una faccia sempre diversa di un mostro, quella centrale un busto e quella inferiore le gambe: combinando le strisce a piacere si generano una quantità enorme di mostri a discrezione della fantasia del bambino. [Segue al numero 301]



Figura 1. Raymond Queneau nel 1961 pubblicò *Cent mille milliards de poèmes*, un libro molto particolare ...

**Note:** [1] A. LETRIA – J.J. LETRIA, *Estrambolici*, La Fragatina, Fraga 2011.

[\*\*\*] Musicista, docente e saggista, condirettore dello CFAM (Centro di Formazione Artistico Musicale) di Verzuolo (CN)