

Publicazione mensile di proprietà dell'Associazione Mathesis di Verona, per le Scienze Matematiche pure e applicate – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso – Redazione: Alberto Burato, Sisto Baldo, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Bruno Stecca, Andrea Sellaroli – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – tel. 338 6416432 – e-mail: [info@mathesis.verona.it](mailto:info@mathesis.verona.it) – [lcorso@iol.it](mailto:lcorso@iol.it) – Stampa in proprio – Numero 302 – Pubblicato il 10 - 11 - 2022

## $n$ -Varietà differenziabili

di Luciano Corso

[Segue dal numero 297]

### 7. Astrazione

Diamo ora un'altra importante definizione: quella di varietà differenziabili. Queste sono dal punto di vista geometrico una generalizzazione astratta di curve e superfici. Si afferma che  $\mathcal{M}$  è una  $n$ -varietà topologica se essa è uno spazio topologico localmente omeomorfo ad aperti di  $\mathbb{R}^n$ . La varietà topologica è poi una varietà differenziabile e questi omeomorfismi locali sono differenziabilmente compatibili se consentono di stabilire la differenziabilità di una qualsiasi funzione da  $\mathcal{M}$  verso un qualunque spazio euclideo (o una qualsiasi varietà differenziabile) in modo non ambiguo e indipendente dal particolare omeomorfismo locale scelto. Vediamo di chiarire meglio queste affermazioni avvalendoci anche della figura 4.

Consideriamo uno spazio topologico  $\mathcal{M}$  (di Hausdorff e a base numerabile) ed una famiglia (finita o numerabile) di omeomorfismi, cioè di funzioni invertibili continue e con inversa continua  $\phi_k$  tali che:

$$\phi_k: (U_k \subset \mathcal{M}) \rightarrow (V_k \subset \mathbb{R}^n), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

dove gli  $U_k$  e  $V_k$  sono aperti e  $k$  è un indice intero. Un tale omeomorfismo si chiama *carta locale* di  $\mathcal{M}$ . Diciamo che la nostra famiglia di carte locali è un *atlante differenziabile* per  $\mathcal{M}$  (e  $\mathcal{M}$  è una *varietà differenziabile*) se

$$(1) \quad U_k \cap U_l = U_k \phi_k^{-1}(V_k) = \mathcal{M};$$

$$(2) \quad \forall h, k, \text{ tali che } U_h \cap U_k \neq \emptyset, \text{ la funzione di transizione}$$

$$\psi_{h,k}: \phi_h(U_h \cap U_k) \rightarrow \phi_k(U_h \cap U_k)$$

data da  $\psi_{h,k} = \phi_k \circ \phi_h^{-1}$  è un diffeomorfismo. In tal caso le carte  $\phi_h$  e  $\phi_k$  si dicono *differenziabilmente compatibili*.

Un qualunque atlante può essere esteso a un atlante massimale (che sarà evidentemente non numerabile), aggiungendo tutte le possibili carte locali che sono compatibili nel senso di (2) con quelle dell'atlante originale. Un tale atlante massimale si chiama *struttura differenziale* su  $\mathcal{M}$ .

Osserviamo che, a priori, su uno spazio topologico senza una qualche ulteriore struttura algebrica o metrica, non esiste una chiara nozione di derivata. Ma nel caso di una varietà differenziabile, grazie alla condizione di compatibilità (2), abbiamo la possibilità di dare un senso preciso alla differenziabilità di una funzione  $f: U \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $U$  aperto.

Diremo infatti che  $f$  è differenziabile sull'aperto coordinato  $U_k$  di  $\mathcal{M}$  se e soltanto se lo è la sua lettura attraverso la carta locale  $\phi_k$ , ossia

$$f \circ \phi_k^{-1}: V_k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(quest'ultima è una funzione tra due aperti euclidei, per cui la differenziabilità ha il significato ordinario).

La compatibilità delle carte locali assicura che la differenziabilità della funzione in un dato punto non dipenda dalla particolare carta locale scelta: se  $f$  è come sopra e  $U_h \cap U_k \neq \emptyset$ , allora anche  $f \circ \phi_h^{-1}$  sarà differenziabile su  $\phi_h(U_h \cap U_k)$ , perché su tal insieme abbiamo  $f \circ \phi_h^{-1} = (f \circ \phi_k^{-1}) \circ \psi_{h,k}$  e le funzioni di transizione sono diffeomorfismi. In maniera analoga, componendo con le carte locali possiamo definire funzioni differenziabili tra un aperto euclideo e  $\mathcal{M}$  (o tra due varietà differenziabili).

Anche le carte locali stesse sono particolari funzioni da un aperto di  $\mathcal{M}$  in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ : la nostra definizione di funzione differenziabile ci permette ora di dire che ciascuna carta locale  $\phi_k$  è un diffeomorfismo tra  $U_k$  e  $V_k$ . In altre parole, le condizioni di compatibilità garantiscono che le carte locali siano *per definizione* dei diffeomorfismi.

A seconda della regolarità delle funzioni di transizione  $\psi_{h,k}$  parleremo di varietà  $C^k$  (se quelle sono differenziabili  $k$  volte con continuità) o  $C^\omega$  (se sono analitiche reali).

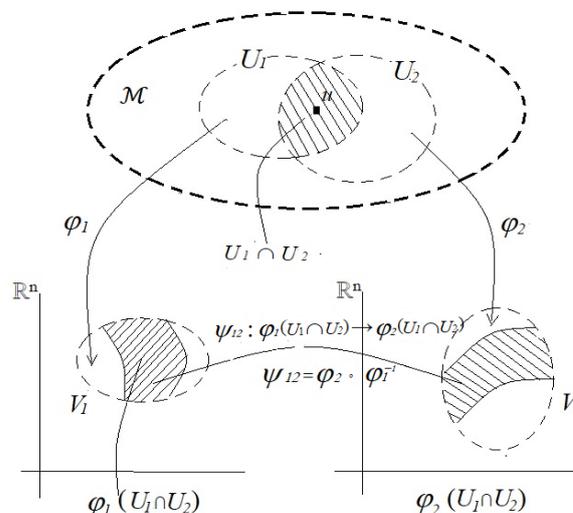


Figura 4. Il disegno mostra il risultato di due applicazioni da  $\mathcal{M}$  a  $\mathbb{R}^n$ . I 2 aperti  $U_1$  e  $U_2$  in  $\mathcal{M}$  vengono mappati omeomorficamente da  $\phi_1$  a  $\phi_2$  nei due aperti  $V_1$  e  $V_2$  di  $\mathbb{R}^n$ . Sull'intersezione  $U_1 \cap U_2$  entrambe le mappe sono definite. A priori non ha senso dire che le carte locali  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono differenziabili, perché  $\mathcal{M}$  è soltanto uno spazio topologico. In compenso, la funzione di transizione  $\psi_{12}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$  è un omeomorfismo tra due aperti di  $\mathbb{R}^n$  e per essa si può parlare di derivate nel senso usuale. Diciamo che le carte locali  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono compatibili se la funzione di transizione  $\psi_{12}$  è un diffeomorfismo. Se  $\mathcal{M}$  è dotata di un atlante in cui tutte le carte locali sono compatibili tra loro, diciamo che è una varietà differenziabile.

**Riferimenti bibliografici:** L'articolo prescinde da riferimenti bibliografici specifici. Tuttavia, è opportuno riferirsi a manuali di topologia generale. Per esempio: [B.1] De Fabritius C. & Petronio C., *Esercizi svolti e complementi di Topologia e Geometria*, ed. Bollati Boringhieri, Torino, 1997. [B.2] Occhetta G., *Note di Topologia Generale e primi elementi di topologia algebrica*, Dip. Math, UNITN: [www.science.unitn.it/occhetta/studenti](http://www.science.unitn.it/occhetta/studenti).

Federazione Italiana Mathesis



*Fine del primo triennio, inizio del secondo*

Il 4 ottobre 2022 è scaduto il primo triennio di vita della Federazione Italiana Mathesis, fondata il 5 ottobre 2019. I soci fondatori (*i nomi che citiamo nel presente articolo sono tutti professori di Matematica*) sono stati Silvana Bianchini (Mathesis di Firenze), Antonio Criscuolo (Mathesis di Bergamo), Ferdinando Casolaro (Mathesis "A. Morelli" di Napoli), Luciano Corso (Mathesis di Verona), Massimo Squillante (Mathesis di Sannio-Irpinia), Carlo Toffalori (Amici della Matematica delle Marche, Mathesis di Camerino APS). È da aggiungere anche Antonio Maturo (Mathesis Abruzzo) che ha sempre sostenuto la necessità di far nascere la Federazione, anche se nella fase di sistemazione dell'Atto Costitutivo, dello Statuto, della prima fase operativa e della registrazione della Federazione presso gli organi amministrativi pubblici preposti ad accogliere la documentazione, non fu presente. Il Coordinamento federale del triennio dal 5 ottobre 2019, data di nascita della Federazione, al 4

ottobre 2022 è stato affidato alle associazioni Mathesis d' Abruzzo (nella persona di Antonio Maturo), di Bergamo (nella persona di Antonio Criscuolo), di Camerino (nella persona di Carlo Toffalori), di Firenze (nella persona di Silvana Bianchini) e di Verona (nella persona di Luciano Corso). In questo triennio le associazioni federate sono state: (1) *Amici della Matematica delle Marche - Mathesis di Camerino* (presidente: Carlo Toffalori), (2) *Mathesis Abruzzo* (presidente: Antonio Maturo), (3) *Mathesis di Bergamo* (presidente: Antonio Criscuolo), (4) *Mathesis di Firenze* (presidente: Silvana Bianchini), (5) *Mathesis di Foggia* (presidente: Filomena De Luca), (6) *Mathesis Mathmare di Castellammare di Stabia* (presidente: Elisa Savarese), (7) *Mathesis di Messina* (presidente: Liliana Restuccia), (8) *Mathesis "A. Morelli" di Napoli* (presidente: Aniello Buonocore), (9) *Mathesis del Sannio-Irpinia* (presidente: Massimo Squillante), (10) *Subalpina Mathesis* (presidente: Cristina Sabena), (11) *Mathesis di Terni* (presidente: Maria Chiara Occhipinti), (12) *Mathesis di Udine* (presidente: Enrico Munini), (13) *Mathesis di Verona* (presidente: Luciano Corso). Il presidente federale di questo primo triennio è stato Luciano Corso, il vicepresidente Antonio Maturo e il segretario Carlo Toffalori. Numerose sono state le iniziative culturali, didattiche ed editoriali promosse dalla Federazione in questo passato triennio; in particolare vanno citati i tre congressi nazionali di Matematica: quello di Diamante (CS) nel 2019 («*Matematica per la scuola, Matematica per la vita ...*»), quello di Pescara-Chieti nel 2020 («*Formazione, didattica e ricerca matematica. Per gli insegnanti del futuro*») e quello di Verona-Firenze («*Matematica 2021: Nuove proposte didattiche*» e «*Dante e la Matematica. Verona-Firenze 2021*»). Aggiungiamo anche quello che si terrà nei primi giorni di dicembre del 2022 a Napoli («*Matematica 2022: Nuove proposte didattiche*»). Il nuovo coordinamento, per il triennio 05-10-2022 => 04-10-2025, è costituito dalle associazioni Mathesis di Camerino, d' Abruzzo, di Bergamo, di Firenze, di Messina, Subalpina di Torino, di "A. Morelli" di Napoli. Le votazioni dei coordinatori federali hanno eletto all' unanimità gli organi rappresentativi della Federazione. Essi ora sono: Carlo Toffalori (Presidente), Cristina Sabena (Vicepresidente), Aniello Buonocore (Segretario). Sull' onda dei successi di questo primo triennio auspichiamo che il nuovo coordinamento federale sappia dimostrare continuità operativa e la forza della Federazione nel perseguire i suoi fini statutari orientati alla cultura, alla didattica, alla ricerca, alla formazione dei docenti di Matematica pura e applicata per migliorare e potenziare l' educazione matematica e in generale scientifica nella scuola e nella società.

## Giorno

Daniele Trucco

*♩ = 56 Largo*

## Sera

(OnoraronO)

Daniele Trucco

### S-PARTITI:

METODO PER LA COMPOSIZIONE DI BRANI MODULARI  
CON TECNICA COMBINTORIA

di Daniele Trucco [\*\*\*]

[Segue dal n. 301]

### Alba

Daniele Trucco

*♩ = 50 Largo*

*♩ = 84 Andante*

Si noterà che tutti i brani sono stati composti (e questa sarà una condizione indispensabile da tenere in considerazione qualora si voglia provare in autonomia l' esperimento) in modo tale che al termine di ogni riga, la riga successiva di qualunque brano ne continui il senso armonico e melodico così da non creare salti bruschi o discontinuità estetiche. [Segue al numero 303]

[\*\*\*] Musicista, docente e saggista, condirettore dello CFAM (Centro di Formazione Artistico Musicale) di Verzuolo (CN)