ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile di proprietà dell'Associazione Mathesis di Verona, per le Scienze Matematiche pure e applicate – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 - 03 - 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Sisto Baldo, Alberto Burato, Tano Cavattoni, Nicola Sansonetto - Via IV Novembre, 11/b - 37126 Verona - tel. 338 6416432 - e-mail: info@mathesis.verona.it - lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 308 - Pubblicato il 03 - 04 - 2023

Introduzione alla teoria della relatività ristretta di Einstein

Liliana Restuccia [*]

[*Segue dal numero* 307]

Ricordiamo che in $\mathscr{M}_4$ la norma di un quadrivettore può essere positiva, nulla o negativa. Scegliamo la soluzione della (40) con segno positivo (vedremo che la soluzione con segno negativo non verrà presa in considerazione per motivi fisici) e otteniamo (vedi (10))

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{ik}dx^i dx^k} =$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2} =$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{-\left[\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2\right] + \left(\frac{dx^4}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \frac{dt}{c}\sqrt{c^2 - v^2} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \qquad (41)$$

dove $v^2 = \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2$.

Pertanto, si perviene alla formula (vedi (28))

$$d\tau = dt/\gamma \ . \qquad (42)$$

La formula (42) asserisce che il tempo τ è una funzione crescente del tempo *t*, vale a dire che se in un laboratorio inerziale un evento si evolve verso il futuro anche in un altro laboratorio inerziale lo stesso evento si deve evolvere verso il futuro, cioè non può accadere, per ragioni fisiche, che un fenomeno evolventesi in un laboratorio (Σ, t) verso il futuro in un altro laboratorio (Σ', t') si evolva verso il passato. Per questo motivo nella (40) si è scelta la soluzione positiva. Infatti, se avessimo scelto la soluzione negativa avremmo ottenuto $d\tau = -dt/\gamma$, vale a dire τ funzione decrescente di *t*, che non ha alcun significato dal punto di vista fisico. $d\tau$ è chiamato *invariante di Lorentz* (vedi (41)), poiché esso dipende dal modulo della velocità della luce *c*, che è un invariante relativistico, e dipende anche dalla quantità $g_{ik}\, dx^i dx^k$ che è anch'essa un invariante di Lorentz. Questo $d\tau$ entrerà nelle definizioni della quadrivelocità relativistica, della quadriaccelerazione relativistica e nella quadriformulazione delle leggi della dinamica.

Ci proponiamo adesso di interpretare il significato fisico del parametro τ. Introduciamo a tale proposito accanto ai sistemi di riferimento inerziali (Σ, t) e (Σ', t') un sistema di riferimento (Σ^*, t^*), chiamato *sistema di istantanea quiete o di moto incipiente*, rispetto al quale la particella è in quiete, vale a dire essa *sta a cavallo su di esso*, cosicché la sua velocità misurata in (Σ^*, t^*) sia $\mathbf{v}^* = 0$ per un determinato istante t^*. Le velocità della particella rispetto agli altri due sistemi risultano diverse da zero. Osserviamo che la velocità della particella non è costante in direzione, modulo e verso, vale a dire che il sistema di istantanea quiete non è un laboratorio inerziale. Nel sistema di riferimento (Σ^*, t^*) (vedi Fig. 6) le quantità misurate hanno i loro veri valori, mentre le misure riferite a (Σ, t) e (Σ', t') subiscono effetti relativistici, dovuti al movimento dei due laboratori. Nel paragrafo dedicato alla quadriformulazione della dinamica relativistica introdurremo la massa propria o d'istantanea quiete della particella m_0, che è la massa della particella, invariante di Lorentz, che non risente degli effetti relativistici del movimento dei laboratori inerziali. Il tempo τ, essendo invariante di Lorentz, non varia da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

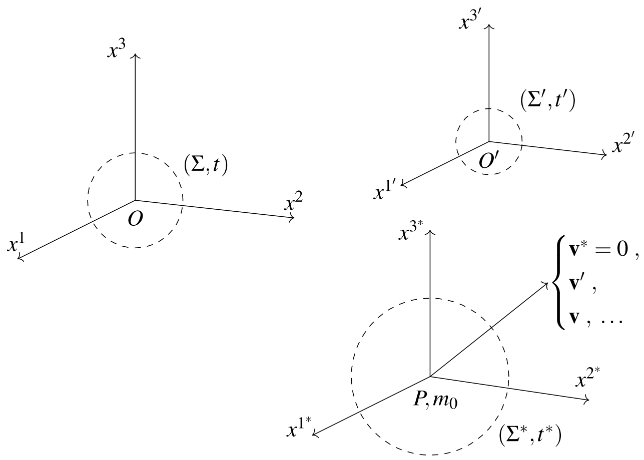

Fig. 6. Due sistemi di riferimento inerziali e il sistema di riferimento d'istantanea quiete (Σ^*, t^*).

Consideriamo le tre velocità di *P*: $\mathbf{v}$ misurata in (Σ, t), $\mathbf{v}'$ misurata in (Σ', t'), $\mathbf{v}^* = 0$ misurata in (Σ^*, t^*). Otteniamo:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \ \text{ in } \ (\Sigma, t), \qquad \text{e}$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{(v')^2}{c^2}}\, dt' \ (\Sigma', t')\,, \qquad (43)$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{(v^*)^2}{c^2}}\, dt^* = dt^* \ \text{ in } \ (\Sigma^*, t^*). \qquad (44)$$

Dal risultato fondamentale $d\tau = dt^*$ (vedi (44)), si deduce che $d\tau$ è uguale all'intervallo infinitesimo temporale misurato nel sistema di istantanea quiete, quindi non risente degli effetti relativistici, e pertanto τ è *il tempo proprio della particella*. $d\tau$ risulta minore dell'intervallo misurato in (Σ, t). Vale a dire, dalla $(43)_1$ si deduce che dt misurato in (Σ, t) (lo stesso dicasi per l'intervallino di tempo elementare misurato negli altri sistemi inerziali) all'apparenza ha un valore maggiore del tempo proprio

$$dt = d\tau/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

(vedi *dilatazione temporale*). Supponiamo, adesso, di voler calcolare in (Σ, t) il tempo τ che trascorre in un intervallo temporale $[0, t]$. Integrando la formula $(43)_1$ si ha

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma} = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt\,. \qquad (45)$$

Si possono considerare due situazioni:

i) la particella si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme, allora è $\mathbf{v} = \mathbf{cost}$. In tal caso la (45) è integrabile e τ rappresenta il tempo fluito in (Σ^*, t^*) in corrispondenza all'intervallo temporale $[0, t]$ fluito in (Σ, t):

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_0^t dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ t\ ; \tag{46}$$

ii) la velocità $\mathbf{v}$ non è costante $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. In tal caso il sistema di istantanea quiete della particella varia nel tempo e l'integrale della formula (45) viene considerato come "somma continua" di intervallini di tempo elementari $d\tau$ in successivi riferimenti d'istantanea quiete associati alla particella nell'intervallo $[0, t]$.

6. Quadrivelocità e quadriaccelerazione relativistiche

Per definire la quadrivelocità e la quadriaccelerazione relativistiche dobbiamo introdurre accanto ai sistemi di riferimento inerziali anche il sistema di istantanea quiete (Σ^*, t^*) (vedi Fig. 6).

Sia Γ una curva di genere tempo dello spazio-tempo di Minkowski avente equazioni parametriche

$$x^i = x^i(\tau) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{47}$$

Su Γ ad un certo evento P possiamo associare più sistemi di coordinate $x^i = x^i\left(x^{k'}\right)$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, e la legge di passaggio da un sistema di coordinate ad un altro è la trasformazione di Lorentz. Definiamo quadrivelocità dell'evento P il quadrivettore

$$\mathbf{U} \coloneqq dP/d\tau\ , \tag{48}$$

tangente alla curva Γ nell'evento P e *di genere tempo*. La quadrivelocità è un *ente assoluto*, vale a dire esso non varia nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro, ma variano soltanto le sue componenti rispetto alla base locale associata alle coordinate locali considerate. Essendo $d\tau$ Lorentz invariante le componenti della quadrivelocità variano da una base locale a un'altra come variano le componenti del quadrivettore dP. Si ha

$$\mathbf{U} \coloneqq \frac{dP}{d\tau} = \frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\tau} = U^i \frac{\partial P}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{49}$$

dove le $U^i = dx^i/d\tau$ sono le componenti di $\mathbf{U}$ rispetto alla base locale $\partial P/\partial x^i$ riferita alle coordinate locali x^i. Il simbolo $\partial/\partial x^i$ prende il nome di derivata parziale di P rispetto alla coordinata x^i, pertanto qui la base locale ha le seguenti 4 componenti

$$\frac{\partial P}{\partial x^i} = \left\{\frac{\partial P}{\partial x^1}, \frac{\partial P}{\partial x^2}, \frac{\partial P}{\partial x^3}, \frac{\partial P}{\partial x^4}\right\}.$$

Calcoliamo le componenti spaziali U^α, rispetto alla base locale $\partial P/\partial x^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$, e la componente temporale U^4, rispetto alla base locale $\partial P/\partial x^4$, di U^i.

Proiettando la (49) sulla base spaziale e su quella temporale otteniamo

$$\begin{cases} U^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\tau} = \dfrac{dx^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt} = \dfrac{v^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (\alpha = 1,2,3) \\[2ex] U^4 = \dfrac{dx^4}{d\tau} = \dfrac{dx^4}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ . \end{cases} \tag{50}$$

Da un punto di vista fisico le v^α sono le componenti cartesiane della velocità $\mathbf{v}$, misurate nel sistema inerziale (Σ, t), della particella che sta a cavallo del laboratorio di istantanea quiete (Σ^*, t^*). Notiamo che soltanto la velocità tridimensionale $\mathbf{v}$ ha significato fisico poiché è l'unica misurabile. La quadrivelocità è un ente matematico. Rispetto al laboratorio (Σ', t') le componenti della quadrivelocità si scrivono

$$\begin{cases} U^{\alpha'} = \dfrac{v^{\alpha'}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \\[2ex] U^{4'} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}\ . \end{cases} \tag{51}$$

Rispetto al laboratorio di istantanea quiete (Σ^*, t^*) dove $\mathbf{v}^* = 0$, la quadrivelocità ha componenti

$$\begin{cases} U^{\alpha^*} = \dfrac{v^{\alpha^*}}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = 0 \\[2ex] U^{4^*} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = c \neq 0\ ,\ . \end{cases} \tag{52}$$

da cui si deduce che la quadrivelocità non è mai nulla, essendo la componente temporale sempre diversa da zero. Inoltre, la quadrivelocità è un quadrivettore di genere tempo, essendo la sua norma negativa. Infatti, essendo la norma di un quadrivettore un invariante di Lorentz, la possiamo calcolare nel laboratorio di istantanea quiete, dove i calcoli risultano più facili e otteniamo (vedi equazione (15))

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = g_{i^*k^*} U^{i^*} U^{k^*} = g_{\alpha^*\beta^*} U^{\alpha^*} U^{\beta^*} + g_{4^*4^*} U^{4^*} U^{4^*}$$

$$= \delta_{\alpha^*\beta^*} U^{\alpha^*} U^{\beta^*} - \left(U^{4^*}\right)^2 = U^{\alpha^*} U^{\alpha^*} - \left(U^{4^*}\right)^2 = -\left(U^{4^*}\right)^2$$

$$= -c^2 < 0.$$

La quadriaccelerazione $\mathbf{A}$ si definisce nel seguente modo

$$\mathbf{A} \coloneqq d\mathbf{U}/d\tau\ . \tag{53}$$

Omettiamo la ricerca delle sue componenti e dimostriamo che $\mathbf{U}$ e $\mathbf{A}$ sono ortogonali, vale a dire il loro prodotto scalare è nullo. Deriviamo in (Σ^*, t^*) rispetto a τ l'espressione $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -c^2$ ottenendo

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) = 2\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 0\ .$$

Da cui segue, in virtù della definizione (53),

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = 0\ . \tag{54}$$

[*Segue al numero* 309]

[*] Università degli Studi di Messina, Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Sc. Fisiche e Sc. della Terra ■ Mathesis "Adelina Georgescu" di Messina, e-mail: lrestuccia@unime.it.

PARABOLA

di Wisława Szymborska

Dei pescatori tirarono fuori dagli abissi una bottiglia. Dentro c'era un pezzo di carta, con scritte queste parole: «Aiutatemi! Sono qui. L'oceano mi ha gettato su un'isola deserta. Sto sulla sponda e aspetto aiuto. Fate presto. Sono qui!».
«Non c'è data. Sicuramente ormai è troppo tardi. La bottiglia può aver galleggiato in mare per molto tempo» disse il primo pescatore.
«E non c'è indicazione del luogo. Non si sa neanche quale oceano sia» disse il secondo pescatore.
«Non è né troppo tardi né troppo lontano. L'isola Qui è ovunque» disse il terzo pescatore.
Seguì una sensazione di disagio, calò il silenzio. È quel che accade con le verità universali.

Tratto da Wisława Szymborska, *La gioia di scrivere* (pag. 135), Adelphi editore, Milano, 2009.