ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile di proprietà dell'Associazione Mathesis di Verona, per le Scienze Matematiche pure e applicate – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 - 03 - 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore responsabile: Luciano Corso - Redazione: Sisto Baldo, Alberto Burato, Tano Cavattoni, Nicola Sansonetto - Via IV Novembre, 11/b - 37126 Verona - tel. 338 6416432 - e-mail: info@mathesis.verona.it - lcorso@iol.it – Stampa in proprio - Numero 311 - Pubblicato il 03 - 07 - 2023

Poincaré: fondare la geometria sulla nozione di gruppo

Giuseppina Gerarda Barbieri [*], Giangiacomo Gerla [**]

1 Le idee di Poincaré

Scopo di questo lavoro è evidenziare un possibile collegamento tra recenti ricerche sui fondamenti della geometria e le idee di Poincaré sul ruolo fondazionale della nozione di gruppo. Tali idee, non molto diverse da quelle di Sophus Lie, si formano in un periodo in cui era diventata evidente l'importanza dei gruppi come strumento di unificazione delle varie geometrie. Basta osservare che è il periodo in cui operano Felix Klein, Sophus Lie, Helmholtz e tanti altri. Tuttavia il posto che Poincaré assegna alla nozione di gruppo è più centrale come mostrano le seguenti citazioni.

"*Come Lie, credo che la nozione più o meno inconscia di gruppo continuo sia la sola base logica della nostra geometria. Come Helmholtz, credo che l'osservazione dei movimenti nei corpi solidi ne sia l'origine psicologica*". (Poincaré, 1887)

"*Ciò che chiamiamo geometria non è altro che lo studio delle proprietà formali di un certo gruppo continuo tanto che possiamo dire che lo spazio è un gruppo*". (Poincaré, 1898)

Il convincimento di Poincaré era quindi che la geometria nasce dalla nozione di gruppo e non che i gruppi sono uno utile strumento per la geometria. Da notare che Poincaré non sente il bisogno di tradurre le sue idee in sistemi formali: d'altra parte non amava affatto il metodo assiomatico. Potremmo dire invece che la derivazione delle geometrie dalla nozione di un gruppo era da lui intesa in senso genetico più che logico e quindi come qualcosa di più profondo.

"*L'oggetto della geometria è lo studio di un particolare gruppo; ma il concetto generale di gruppo preesiste nel nostro spirito, almeno in potenza, e si impone a noi non come forma della nostra percezione, ma come forma del nostro intelletto*". (Poincaré, 1905)

Sembra quasi che Poincaré dia nuova vita alle idee di Kant, salvo sostituire alla geometria euclidea l'idea di gruppo. Tuttavia la differenza tra il pensiero di Poincaré e quello di Kant è enorme. Ad esempio Kant guardava ad una sola geometria, quella di Euclide, a cui attribuiva un ruolo assoluto. Poincaré assegnava invece un ruolo assoluto alla nozione di gruppo, a partire dalla quale era possibile costruire tutte le varie geometrie del suo tempo. Quella di Euclide era da considerare solo una delle possibili geometrie ma la sua validità non era superiore, ad esempio, a quella delle geometrie non-euclidee o a quelle non archimedee. Tra queste geometrie la scelta è libera anche se può essere influenzata dalla realtà a cui si rivolge.

"*... è il nostro intelletto che fornisce una categoria alla natura. Ma questa categoria non è un letto di Procuste nel quale costringiamo violentemente la natura, mutilandola secondo quanto esigono i nostri bisogni. Offriamo alla natura una scelta di letti tra i quali scegliamo il giaciglio che va meglio per la sua taglia*". (Poincaré, 1898)

2 Il piano euclideo che si nasconde in un gruppo

Non ci risulta che le idee di Poincaré circa il valore fondativo della nozione di gruppo siano state formalizzate nell'immediato. Tuttavia in tempi più recenti appaiano articoli che sembrano fare proprio questo, senza peraltro che Poincaré venga citato. Si tratta delle ricerche di G. Thomsen, F. Bachmann, A. Prusińska e L. Szczerba, V. Pambuccian e di altri matematici.

Noi ci soffermiamo, a mo' di esempio, solo su un lavoro di A. Prusińska e L. Szczerba del 2002. Tale lavoro si riferisce ad un sistema di assiomi T in una logica del primo ordine proposto da Tarski in [6] che ha la caratteristica di dimostrare tutte e sole le asserzioni (del primo ordine) che sono vere nel modello euclideo classico. Le nozioni primitive sono, oltre quella di punto, quella di "equidistanza" che sussiste tra quattro punti, A, B, C, D se la distanza tra A e B è uguale alla distanza tra C e D e quella di "essere tra" che sussiste tra tre punti A, B, C se B è tra A e C.

Ricordiamo che una logica del primo ordine è un apparato deduttivo in cui è lecito quantificare sugli elementi del dominio ma non sui sottoinsiemi del dominio stesso. Pertanto T non è in grado di provare l'assioma di continuità che è fondamentale per caratterizzare la geometria euclidea classica. Ne segue l'esistenza di infiniti modelli di T non isomorfi al modello euclideo. Ad esempio i modelli non archimedei derivati dal campo dei numeri reali non standard.

Il principale teorema provato da Prusińska e Szczerba è il seguente, dove per "geometria piana euclidea" è intesa la teoria T di Tarski.

Teorema 2.1. *La geometria piana euclidea e la teoria delle isometrie sono mutualmente interpretabili*.

Ricordiamo che due teorie si dicono "mutualmente interpretabili" se una è capace di definire le nozioni primitive dell'altra e viceversa. Ad esempio, la teoria dell'ordine è mutualmente interpretabile con la teoria dell'ordine stretto in quanto da un lato « $\leq$ » si può definire, con la formula $(x < y) \vee (x = y)$ e dall'altro « $<$ » si può definire con la formula $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$. Questo comporta che ogni teorema della prima si può riscrivere come teorema della seconda e viceversa. Tornando al teorema, non tentiamo di riportare una sua dimostrazione, cosa che richiederebbe troppo spazio. Ci limitiamo invece a mostrare come, data l'usuale geometria euclidea ed il relativo gruppo G delle isometrie, si possa procedere alla costruzione, all'interno di G, di una seconda geometria che è una copia isomorfa della prima. L'idea è di assumere che tale struttura abbia come dominio (cioè come insieme di punti) l'insieme dei ribaltamenti centrali. Ne segue la necessità di definire tale insieme in termini di teoria dei gruppi. Un aiuto in proposito viene dalle nozioni di idempotenza e da quella di commutatività, definibili dalle equazioni $x^{-1} = x$ e $xy = yx$ rispettivamente. Questo in quanto nel piano valgono le seguenti equivalenze.

- Una isometria è idempotente se e solo se o è un ribaltamento centrale oppure un ribaltamento assiale.
- Un ribaltamento centrale e uno assiale commutano se e solo se il centro del primo appartiene all'asse del secondo.
- Due ribaltamenti assiali commutano se e solo se i relativi assi sono perpendicolari.
- Due ribaltamenti centrali commutano se e solo se coincidono.

Queste proprietà permettono di provare il seguente teorema (si veda Bachmann in [1]).

Teorema 2.2. *Esiste una formula $Ra(x)$ nel linguaggio $\mathcal{L}$ della teoria dei gruppi che è verificata in G se e solo se x è interpretata da un ribaltamento assiale. Esiste inoltre una formula $Rc(x)$ in $\mathcal{L}$ che è verificata in G se e solo se x è un ribaltamento centrale.*

Dimostrazione. Sia $Ra(x)$ una formula in $\mathcal{L}$ con variabile libera x che asserisce che x è idempotente e che esistono tre isometrie idempotenti β, γ, δ differenti tra loro e da x tali che x e β commutano sia con γ che con δ. Una tale formula esiste in $\mathcal{L}$ essendo i predicati "essere idempotenti", "essere diversi", "essere commutabili" definibili in $\mathcal{L}$. Per provare che $Ra(x)$ definisce i ribaltamenti assiali, supponiamo che α sia una isometria che verifica $Ra(x)$. Allora α è idempotente e quindi è un ribaltamento centrale oppure assiale. Supponiamo per assurdo che α sia centrale con centro P. Allora, poiché α commuta con γ e δ, questi due ribaltamenti sono assiali con assi contenenti entrambi P. Poiché β commuta con γ e δ, β non può essere centrale poiché in questo caso il suo centro dovrebbe essere P, mentre $\beta \neq \alpha$. D'altra parte β non può essere assiale poiché in questo caso il suo asse dovrebbe essere ortogonale sia all'asse di γ che a quello di β in contrasto con il fatto che tali assi si incontrano in P. Questo assurdo prova che α non essendo centrale è assiale. Viceversa, supponiamo che α sia un ribaltamento assiale, allora $Ra(x)$ è soddisfatta ponendo β uguale ad un ribaltamento assiale con asse parallelo ad α e ponendo inoltre γ e δ uguali a due ribaltamenti assiali con assi perpendicolari ad α. Infine, possiamo definire i ribaltamenti centrali con la formula in $\mathcal{L}$ che asserisce che x è idempotente ma non è un ribaltamento assiale. □

Procedendo in modo simile, si vede che sono definibili altre nozioni tra cui le due nozioni primitive proposte da Tarski. In definitiva si costruisce all'interno di G un modello di geometria euclidea isomorfo al piano euclideo da cui si è partiti.

Concludiamo sottolineando il notevole interesse filosofico per un approccio alla geometria in cui non si parla di punti, rette ed altri oggetti geometrici. Si parla solo di movimenti che sono possibili nell'ambiente in cui ci muoviamo.

Riferimenti bibliografici: [1] Bachmann F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, in Zweite ergänzte Auflage. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer–Verlag, Berlin-New York (1973). [2] Poincaré H., *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, Bulletin de la société mathématique de France, tome 15, pp. 203–216 (1887). [3] Poincaré H., *On the foundation of geometry*. The Monist (1898). [4] Poincaré H., *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, (1905). [5] Prusińska A., and Szczerba L., *Geometry as an extension of the group theory*, Logic Log. Philos. 10 131–135 (2002). University Press, New York, (1994). [6] Tarski A., *What is Elementary Geometry*? Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Volume 27, 16–29 (1959).

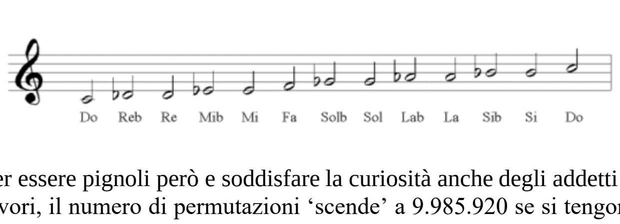
[*] Università degli Studi di Salerno – e-mail: gibarbieri@unisa.it.
[**] Università degli Studi di Salerno – e-mail: ggerla@unisa.it.

ONORARONO: ISTRUZIONI PER LA SCRITTURA DI UN CANONE RUOTABILE

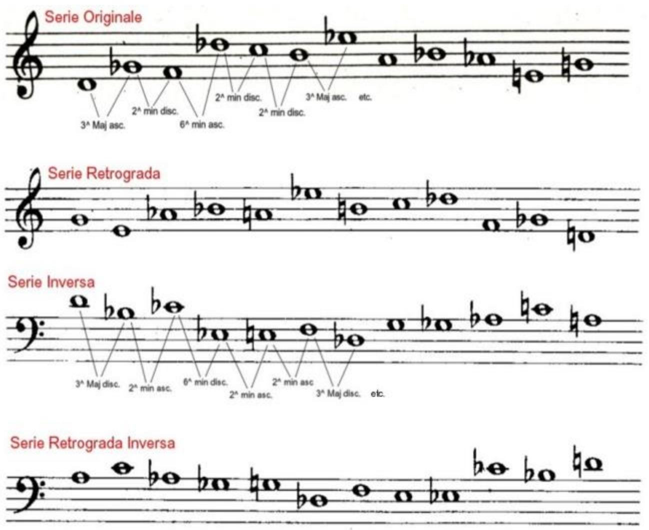
di Daniele Trucco [***]

1. Presentazione

Sia la matematica sia la musica si prestano molto bene alla costruzione di giochi di vario tipo: molto interessanti in particolare sono quelli che fondono le due discipline mettendo in risalto quanto grande sia il legame tra i due mondi. Oltretutto, allo stesso modo in cui è possibile giocare con le parole o con le lettere dell'alfabeto per creare nomi o frasi palindrome, acrostici o rebus, così si può sfruttare il linguaggio musicale con fini simili. Un esempio è proprio quello costituito dal canone. Si parta da questa considerazione: le 12 note comprese all'interno di una singola ottava danno un numero di permutazioni possibili indubbiamente molto elevato ma di certo non infinito (in matematica si indica questa operazione con il punto esclamativo e si legge 'fattoriale'. Il fattoriale di 12 [12!] è 479.001.600 ed è il risultato di $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$). Utilizzare una scala cromatica che utilizzi i diesis (#) o i bemolli (b) è indifferente ai fini dell'operazione poiché nel temperamento equabile l'altezza di un do diesis è analoga a quella di un re bemolle.



Per essere pignoli però e soddisfare la curiosità anche degli addetti ai lavori, il numero di permutazioni 'scende' a 9.985.920 se si tengono presente alcune accortezze: si prenda una delle possibili sequenze casuali di 12 note come quella qui sotto riprodotta e si noti come la stessa possa essere letta dal fondo verso l'inizio (moto retrogrado), invertendo la sequenza come se mettessi un asse di simmetria (inverso) e leggendo al contrario anche quest'ultima (retrograda inversa). Queste 3 casistiche generate da un'unica serie dovranno dunque essere tolte dal calcolo delle permutazioni complessive se si vuole ottenere un risultato musicalmente corretto. Anche chi è a digiuno di tecniche



di scrittura musicale può già aver capito come talvolta ciò che compare sul pentagramma possa racchiudere curiosità impensabili o come talvolta i compositori si divertano a giocare con gli ascoltatori sottoponendoli a test matematici o – come in questo nostro caso – geometrici.
Ciò che bisogna tenere ben presente come prerequisito prima di avventurarsi nella costruzione di una melodia ruotabile però è la definizione del termine 'canone'. La parola, derivata dal greco, indica una composizione che si basa sull'esistenza di almeno due voci costruite in modo tale che non solo suonino bene insieme ma rispettino anche delle regole molto precise. Infatti, iniziata una melodia, questa deve essere seguita (dopo un dato intervallo di tempo) da un'altra voce che riproduca, secondo il principio matematico dell'isomorfismo, in modo il più esatto possibile la linea melodica esposta da quella che ha iniziato e che le si sovrapponga senza creare errori a livello armonico (quelle che anche gli orecchi meno esperti identificano come stonature). [*Segue al numero* 312]

[***] Musicista, docente e saggista, condirettore dello CFAM (Centro di Formazione Artistico Musicale) di Verzuolo (CN)

Un caro saluto a Benedetto Scimemi

(*da Patavina Mathesis*) Domenica mattina, 11 – 06 – 2023, ci ha lasciato il professore Benedetto Scimemi che molti di noi hanno avuto occasione di conoscere direttamente o indirettamente.

Nato a Padova nel 1938, era laureato in Fisica, ma poi le sue ricerche si sono rivolte alla Matematica. Fu professore di Algebra e poi di Matematiche Complementari all'Università di Padova. Interessato alla didattica della matematica, presente nella CIIM dalla sua fondazione nel 1975, ne è stato presidente dal 1985 al 1988. Ha sempre mantenuto un vivo interesse per l'insegnamento; chi lo ha conosciuto lo ricorda come un gran signore, sempre gentile, discreto e disponibile all'ascolto. Curioso degli aspetti più profondi della matematica elementare, divulgatore efficace, è noto in particolare per le sue ricerche sugli assiomi della geometria della carta piegata (assiomi di Scimemi-Huzita) e sul rapporto tra musica e trasformazioni geometriche. Quest'ultimo tema gli permetteva di coniugare i suoi interessi per la matematica e la musica, sua passione.

Scimemi ha dedicato una cura particolare all'Associazione Patavina Mathesis, con i suoi consigli e la sua esperienza scientifica e didattica. Le sue conferenze sono state per la nostra Associazione momenti di arricchimento culturale e di aggregazione.
Grazie Benedetto, rimarrai nel ricordo di tutti noi.

(*L. Corso*) **Benedetto Scimemi**: un ricordo. L'11 giugno 2004 mi invitò presso la Mathesis patavina a tenere una relazione sulla Matematica e la Poesia. In quell'occasione presentai il mio libro «Parabole e punti», da poco pubblicato. Partecipai anche al Piano Nazionale Lauree Scientifiche per il Veneto, di cui Benedetto fu guida convinta, e fu un onore.