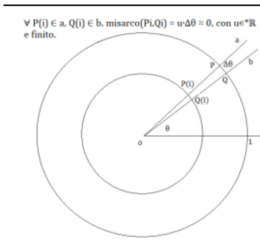
ISSN: 2037-6367

MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso –Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca– Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesis.verona.it – Stampa in proprio – Numero 258 – Pubblicato il 03 - 09 - 2019

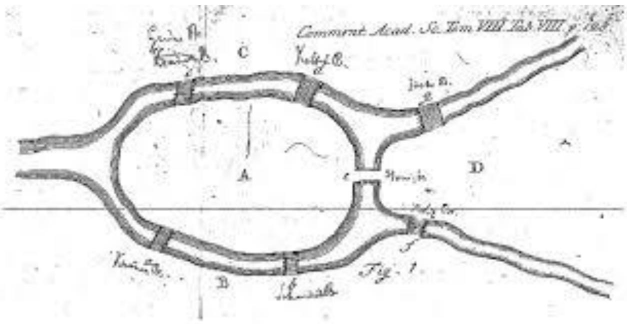


LA BIBLIOTECA DI BABELE: LE GUIDE TURISTICHE DI KÖNIGSBERG

di Francesco Festa [*]

Un tema topico della matematica divulgativa che ruota attorno al celebre racconto dello scrittore argentino Jorge Luis Borges *La biblioteca di Babele* è esplorare i cammini che permettono di percorrere il «numero indefinito, forse infinito,» delle sale della biblioteca. Trattandosi di cammini, è obbligatorio il rimando alla topologia, in particolare alla cosiddetta "teoria dei grafi" e, in ultima analisi, al problema che si ritiene abbia dato i natali a questo rigoglioso ramo della matematica: i sette ponti di Königsberg.

Grazie agli articoli di Giorgio Mainini e Domenico Lenzi, ho potuto reperire in rete il lavoro originale di Leonard Euler, in arte Eulero, intitolato ***Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis***, che, se non fosse perché scritto in latino, potrebbe essere ospitato in una rivista attuale. A conferma di quanto riportato da Giorgio Mainini, non solo da nessuna parte vi è traccia dei grafi, ma non vi compare neppure il celebre "disegnino" (il termine è del Mainini) riportato in qualsiasi esposizione divulgativa. Scopo di questo mio modesto contributo è mostrare che la soluzione a suo tempo proposta da Eulero è ancora moderna e perfetta per la Biblioteca di Babele.



Per la posizione del problema, possiamo riprendere le parole di Eulero stesso: *«A Königsberg in Prussia c'è un'isola A, chiamata der Kneiphof, e il fiume che la circonda si divide in due rami, come si può vedere nella figura* [tratta dal summenzionato articolo originale. N.d.A.]*; i rami di questo fiume sono muniti di sette ponti a, b, c, d, e, f, g. Circa questi ponti veniva posta questa domanda, si chiedeva se fosse possibile costruire un percorso in modo da transitare attraverso ciascun ponte una e una sola volta. E mi fu detto che alcuni negavano ed altri dubitavano che ciò si potesse fare, ma nessuno lo dava per certo. Da ciò io ho tratto questo problema generale: qualunque sia la configurazione e la distribuzione in rami del fiume e qualunque sia il numero dei ponti, si può scoprire se è possibile passare per ogni ponte una ed una sola volta?»*.

La soluzione di Eulero prende le mosse dall'associare a ciascuna delle quattro regioni della città collegata dai ponti una lettera, più precisamente le prime lettere dell'alfabeto latino, *A*, *B*, *C* e *D*. Ad ogni percorso tra le quattro regioni compiuto attraversando i ponti, che diremo "cammino", corrisponde una sequenza delle lettere corrispondenti, in termini moderni una "stringa". Alla sillaba "*AB*", ad esempio, corrisponde il cammino che dalla regione *A* conduce alla *B* attraverso uno dei due ponti disponibili. Alla parola "*ABA*" corrisponde quello che dalla regione *A* conduce alla *B*, quindi di nuovo alla *A*. Si osservi che il contrario non è vero, infatti esistono stringhe, come la "*BC*" cui non corrisponde alcun cammino, poiché non è possibile a partire dalla regione *B* raggiungere direttamente la *C* senza passare prima da una delle altre *A* o *D*. Ne discende che per percorrere *esattamente* sette ponti è necessaria una stringa di *esattamente otto lettere*; una di sette lascia indietro almeno un ponte, mentre una di nove ne percorre almeno uno due volte.

Eulero rileva poi una particolarità che lega il numero di ponti n_p tra una data regione *R* e le altre con cui è collegato, e il numero di ripetizioni n_r con cui la lettera *R* deve comparire nella stringa cercata: tutte le volte che quel numero è *dispari*, il numero di ripetizioni è pari a:

$$n_r = 1 + \frac{n_p - 1}{2} = \frac{n_p + 1}{2};\ n_p\ dispari.$$

Intuitivamente la ragione è la seguente: se la regione *R* è connessa alle altre attraverso un solo ponte, in virtù del divieto di attraversarlo due volte, la lettera *R* potrà comparire una volta sola (come corollario, *R* dovrebbe essere necessariamente la regione di partenza o di arrivo del cammino). Ad ogni coppia di ponti che si aggiunge, in virtù del summenzionato divieto, ciascuno dei due sarà attraversato nel percorso di "andata verso" e "ritorno da" toccando la regione una sola volta, quindi ad ogni coppia corrisponde, nella stringa corrispondente, una sola aggiunta della lettera *R*.

Nel caso della città di Königsberg dei tempi di Eulero, con i simboli da lui utilizzati, si ha quanto riepilogato in tabella:

Regione	Ponti	Ripetizioni
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

di conseguenza la stringa associata al cammino cercato dovrebbe contenere 3 + 2 + 2 + 2 = 9 lettere. Riepilogando, essa dovrebbe includere *contemporaneamente* otto e nove lettere, che è impossibile, quindi il problema non ammette soluzione. La dimostrazione è dunque per assurdo.

Quando n_p è pari, n_r non è univocamente determinato e il problema si complica, tuttavia il caso volle che le regioni di Königsberg fossero tutte connesse da un numero dispari di ponti e la questione poteva considerarsi conclusa. Non per Eulero ovviamente, il quale la approfondisce inserendo anche le lettere latine minuscole *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* e *g* associate a ciascun ponte per tenere conto dell'effettiva connessione delle quattro regioni. Nell'esempio di cui sopra, la sillaba *AB* si specifica allora nelle due *AaB* e *AbB*, che chiariscono ulteriormente quale dei due ponti sia stato attraversato. Proseguendo con il ragionamento, il grandioso matematico svizzero arriva alla celebre conclusione: *«Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente riconoscere se la passeggiata, alle solite condizioni, è possibile o no, in forza della seguente regola. Se sono più di due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione giunge un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione* *dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.»*.

La ragione che rende questa dimostrazione estremamente attuale è lo schema astratto su cui si fonda. Eulero infatti inventa un *linguaggio formale* per descrivere i possibili cammini. L'alfabeto del linguaggio è costituito dalle lettere associate alle diverse regioni. Una qualsiasi stringa che contiene *esclusivamente* le lettere dell'alfabeto, senza che una di esse vi compaia due volte di seguito, rappresenta un *potenziale* cammino. È questione di gusti estendere questa definizione accettando anche sillabe costituite da due lettere identiche, assegnando a queste il significato, ad esempio, che la persona sia rimasta nella regione corrispondente. La *connettività*, vale a dire il modo in cui le regioni sono collegate, seleziona tra le possibili stringhe quelle *ben formate*, cui corrisponde un cammino *effettivo*. Ad esempio, se tutte le regioni sono tra loro interconnesse, *una qualsiasi stringa rappresenta un cammino non solo potenziale, bensì effettivo.*

Torniamo alla Biblioteca di Babele: nell'esempio di Königsberg, ciascun libro contenente una qualsiasi sequenza delle quattro lettere *A*, *B*, *C* e *D*, ad esempio *ABCADABABDABDCA*… estremamente noioso da leggere e, soprattutto, incomprensibile al lettore comune, altro non è che la rappresentazione astratta di una passeggiata per Königsberg. Meglio, *di una potenziale passeggiata*, poiché per come sono disposti i ponti, solo ad alcune tra le possibili stringhe è associato un cammino effettivo. Da cui si comprende la potente metafora del racconto: Borges scrive che «ciascun libro contiene quattrocentodieci pagine, ciascuna pagina contiene quaranta righe, ciascuna riga ottanta lettere» scelte tra l'alfabeto della Biblioteca, costituito da 25 caratteri, di conseguenza ciascun libro contiene una specifica stringa lunga 1.312.000 caratteri tra le 25 elevato alla 1.312.000 stringhe possibili. I libri di per sé sono privi di significato, almeno fino a quando qualcuno -posso solo immaginare il lettore o, in astratto, un "interprete"- non attribuisce alle lettere un significato e fissa le regole per far emergere i libri validi dagli abissi degli inutili, il comprensibile dall'incomprensibile. Un fatto assolutamente comune ai giorni nostri: i file residenti sui nostri computer, sequenze sterminate di "0" e di "1", sono interpretati perfettamente da una particolare applicazione e tuttavia illeggibili da altre.

Concludo rilevando che per una guida turistica della città prussiana la scelta delle lettere è assolutamente indifferente, con l'unica condizione che ad ogni regione sia associata almeno una lettera e differente dalle altre già utilizzate. Ad esempio, se, in riferimento a Roma, associamo alle lettere:

R = Stazione Termini;
O = Piazza di Spagna;
M = Castel Sant'Angelo;
A = Piazza San Pietro;

la passeggiata per ROMA identificata dalla parola "*ROMA*" si interpreta come quella di un devoto pellegrino che, sceso a stazione Termini, si rechi dapprima in piazza di Spagna, quindi a Castel Sant'Angelo e infine in piazza San Pietro. Se, per riprendere il treno, ritornerà esattamente sui suoi passi, percorrerà nella Città Eterna la romantica passeggiata "*AMOR*"!

Riferimenti bibliografici: [1] Euler Leonard, *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 8, pp. 128-140, 1741, San Pietroburgo. [2] Borges Jorge Luis, *La Biblioteca di Babele*, 2003, La biblioteca di Babele, in "Finzioni", 1941, Arnoldo Mondadori Editore, traduzione di Franco Lucentini, 1955, Milano. [3] Mainini Giorgio, *Il problema dei ponti di Königsberg: soluzione di Euler*, reperibile all'indirizzo https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/EuleroK%F6nigsbergGiorgioMainini.pdf. [4] Lenzi Domenico, *Leonardo Eulero e i ponti di Königsberg*, reperibile all'indirizzo https://www.matematicamente.it/storia/Lenzi-Ponti_Eulero.pdf.

[*] Ingegnere, cultore di Matematica – Bolzano
e-mail: francescofst@yahoo.it

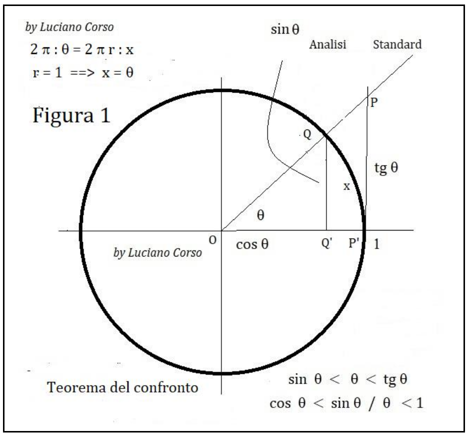
Confronto tra Analisi Standard e Non Standard: $\theta \approx 0 \Longrightarrow \sin\theta/\theta \approx 1$

di Luciano Corso

Consideriamo la seguente espressione analitica:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$$

In analisi standard, il controllo della tesi si fa partendo dalla geometria (Figura 1); confrontando le aree $\mathrm{OQP'}$, $\widehat{\mathrm{OQP'}}$, $\mathrm{OPP'}$ si trova $\sin(\theta) < \theta < tg(\theta)$ [B.1] e poi si arriva a $cos(\theta) < \sin(\theta)/\theta < 1$. Si passa quindi



al limite per $\theta \to 0$, e si deve tener conto che la dimostrazione del $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ impone la complicata procedura dell'ε, δ [B.3]. Poi, si deve applicare il teorema del confronto dei limiti di funzioni e si ha:

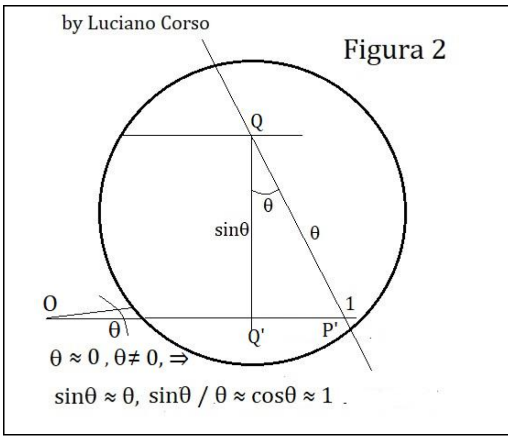
$$\lim_{\theta\to 0} cos(\theta) \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta} \le 1.$$

Poiché $\lim_{\theta\to 0} cos(\theta) = 1$, allora $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1.$

In analisi non standard, la cui struttura analitica si basa sul campo ordinato dei numeri iperreali [B.2], la verifica si può effettuare così (si veda la figura 2). Dal centro O del cerchio, si fanno uscire due raggi OP' e OQ che, nella zona del punto P' fortemente ingrandita, appaiono nettamente separati, ma le loro intersezioni P' e Q con la circonferenza sono di fatto infinitamente vicine. θ è l'angolo tra OP', asse delle ascisse, e OQ. Nell'ingrandimento appare che θ è la misura del tratto infinitesimo $\widehat{\mathrm{QP'}}$ della circonferenza che è infinitamente vicino (in simboli "≈") alla misura della sua corda |QP'|; $\sin\theta$ è la misura del tratto infinitesimale |QQ'|;. Così,

$$(\theta \approx 0, \theta \neq 0) \Rightarrow \sin\theta \approx \theta, [\sin\theta/\theta \approx \cos\theta], [\cos\theta \approx 1].$$

Da cui l'asserzione è vera.



Il cerchio in Figura 2 è un microscopio e non la circonferenza goniometrica di Figura 1. I due raggi "OP'" e "OQ", fuori microscopio, sono stati volutamente separati anche se sono quasi coincidenti.

La dimostrazione non standard sostituisce al teorema del confronto la più immediata transitività della relazione "≈".

Riferimenti bibliografici: [B.1] Apostol Tom M. Calcolo Vol. 1° - Analisi 1, ed. Boringhieri, Torino, 1985, pag. 130. [B.2] Keisler H.J., *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach*, Second Edition, University of Wisconsin, Copyright by H. J. Keisler, REVISED February 2012. [B.3] Burato A., Corso L., Analisi matematica standard e non standard a confronto – 1, MatematicaMente n. 216 del 20160905, Mathesis Verona.