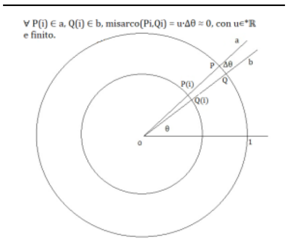
ISSN: 2037-6367



MatematicaMente

Pubblicazione mensile della sezione veronese della MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche – Fondata nel 1895 – Autorizzazione del Tribunale di Verona n. 1360 del 15 – 03 – 1999 – I diritti d'autore sono riservati. Direttore: Luciano Corso –Redazione: Alberto Burato, Fabrizio Giugni, Michele Picotti, Sisto Baldo, Andrea Sellaroli, Bruno Stecca – Via IV Novembre, 11/b – 37126 Verona – 338 6416432 – e-mail: lcorso@iol.it – info@mathesis.verona.it – Stampa in proprio – Numero 265 – Pubblicato il 03 - 03 - 2020

Quando le coordinate diventano un ostacolo alla ricerca e alla comprensione della soluzione

UNA DEFINIZIONE ASSOLUTA DI GRADIENTE APPLICATA A PROBLEMI GEOMETRICI DI MASSIMO E MINIMO

Giorgio Goldoni [*]

[*Segue dal numero* 264]

Il gradiente, coerentemente con la definizione precedente, è allora definito come il vettore che ha per componenti le due derivate parziali della funzione *f*. La scelta del sistema di coordinate è però arbitraria e rispetto a un altro sistema di coordinate la stessa regione di piano corrisponde a un diverso sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$, dando luogo a una diversa funzione di due variabili [2]. Tale funzione avrà, in generale, derivate parziali diverse da quelle della funzione precedente e il gradiente avrà quindi componenti diverse. Non è allora affatto ovvio che le diverse componenti continuino a definire effettivamente uno stesso vettore del piano.

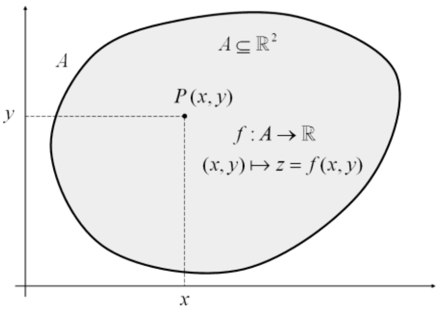


Figura 16

Di solito, infatti, questa è una proposizione che compare come esercizio nei testi di analisi matematica e che richiede allo studente di dimostrare che, cambiando sistema di coordinate, le derivate parziali cambiano con la stessa legge con cui effettivamente cambiano le componenti di un vettore. Ritengo quindi assai più corretto ed efficace definire il gradiente direttamente in modo geometrico, in modo che risulti immediatamente chiara la sua natura vettoriale. In altre parole, ritengo preferibile dare una definizione assoluta di gradiente, indipendente cioè dal sistema di coordinate scelto. Del resto, le derivate parziali sono due derivate direzionali la cui peculiarità è legata unicamente al particolare sistema di coordinate cartesiane utilizzato.

5. Una definizione assoluta di Gradiente

Consideriamo dunque una funzione *f* definita su una regione di piano *A* a valori reali che, per aiutare l'intuizione, possiamo pensare come la funzione che associa a ogni punto *P* di una lastra sottile *A* la temperatura z = $f(P)$. Fissato un punto *P* di *A* e un vettore $\vec{v}$ possiamo definire la rapidità di variazione della temperatura nel punto *P* nella direzione e verso indicate da $\vec{v}$, cioè la derivata direzionale di *f* nel punto *P* relativa al vettore $\vec{v}$. A questo scopo introduciamo un asse coordinato *s* avente l'origine in *P* e la direzione e il verso di $\vec{v}$ (fig.17). Dato un vettore infinitesimo *dP* parallelo a $\vec{v}$, indichiamo con *ds* la coordinata infinitesima [3] del punto *P* + *dP* e consideriamo il differenziale $df(P) = f(P + dP) - f(P)$ e quindi il rapporto differenziale

$$\frac{df(P)}{ds} = \frac{f(P+dP) - f(P)}{ds}\ .$$

La derivata direzionale è allora definita come la parte standard [4] del rapporto differenziale:

$$D_{\vec{v}} f(P) = st\left[\frac{df(P)}{ds}\right].$$

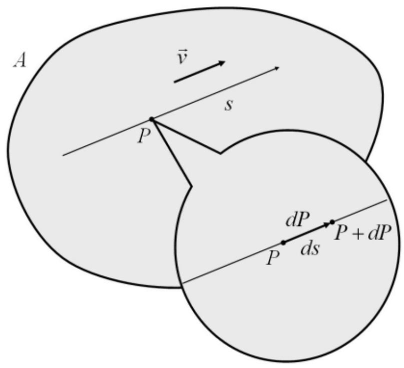


Figura 17

Il grafico di *f* può essere definito anche senza introdurre le coordinate nel piano di *A*. A questo scopo basta considerare un asse delle quote con l'origine in un punto qualsiasi del piano e perpendicolare al piano stesso.

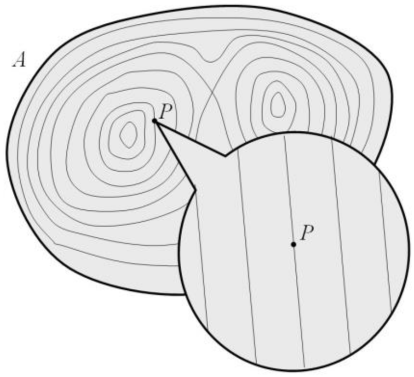


Figura 18

Se il grafico è una superficie liscia e ammette quindi in ogni suo punto un piano tangente, allora restano definite le curve di livello, che corrispondono ai punti di *A* in cui *f* ha lo stesso valore.

Nell'esempio della temperatura di una lastra sottile si tratterebbe delle curve isoterme. Nella monade di un punto *P* in cui il piano tangente al grafico non è orizzontale, poiché le sezioni parallele di un piano sono rette parallele, le curve di livello risultano indistinguibili da rette parallele (fig.18).

Puntiamo allora un microscopio a infiniti ingrandimenti sul punto *P* e consideriamo poi, nel campo visivo del microscopio, una curva di livello corrispondente a un valore di *f* maggiore di quello in *P*. La curva di livello considerata e quella passante per *P* risultano allora indistinguibili da due rette parallele. Tra gli infiniti rapporti differenziali relativi al punto *P* ottenuti passando da *P* a un punto *P* + *dP* della curva di livello considerata ne esiste uno massimo, che corrisponde alla direzione perpendicolare alla curva di livello per *P* e al punto $P + dP_{\perp}$ (fig.19).

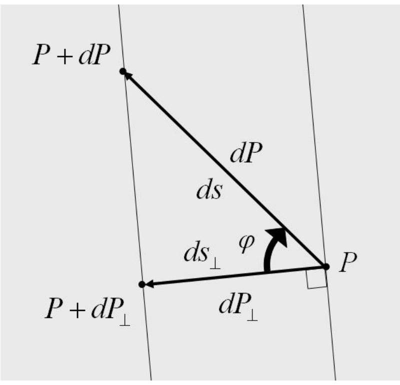


Figura 19

Infatti, per un generico dP che forma un angolo φ con $dP_\perp$, si ha che $ds > ds_\perp$, mentre
$f(P+dP)-f(P) = f(P+dP_\perp)-f(P)$, per cui

$$\frac{f(P+dP)-f(P)}{ds} < \frac{f(P+dP_\perp)-f(P)}{ds_\perp} \ .$$

In particolare, si ha che $ds_\perp = ds\cos\varphi$ e quindi che

$$\frac{f(P+dP)-f(P)}{ds} = \frac{f(P+dP_\perp)-f(P)}{ds_\perp}\cos\varphi \ .$$

Prendendo la parte standard di entrambi i membri troviamo che nel punto *P* esiste una derivata direzionale massima in direzione perpendicolare alla curva di livello per *P* nel verso dei valori crescenti di *f* e che ogni altra derivata direzionale si ottiene da questa moltiplicandola per il fattore $\cos\varphi$. Risulta allora possibile descrivere il comportamento delle derivate direzionali nel punto *P* mediante un vettore avente direzione perpendicolare alla curva di livello per *P*, verso delle quote crescenti e modulo uguale alla derivata direzionale massima, che chiamiamo gradiente della funzione *f* nel punto *P* e che indichiamo con $\vec{\nabla}f(P)$. La derivata direzionale secondo un vettore $\vec{v}$ qualsiasi si ottiene semplicemente come proiezione del gradiente sull'asse avente direzione e verso di $\vec{v}$ (fig.20). In altri termini, la derivata direzionale secondo un vettore qualsiasi si ottiene dal prodotto scalare del gradiente col versore del vettore:

$$D_{\vec{v}}f(P) = \vec{\nabla}f(P)\cdot\hat{v}.$$

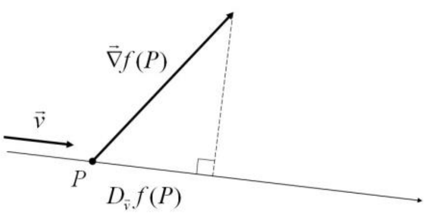


Figura 20

Se introduciamo un sistema di coordinate cartesiane nel piano di *A*, allora le componenti del gradiente sono le sue proiezioni sugli assi e quindi le due derivate direzionali lungo gli assi, cioè le derivate parziali. Ritroviamo così la definizione solita di gradiente con la consapevolezza però che si tratta di un vettore e quindi di un oggetto la cui esistenza è indipendente dal sistema di coordinate. In particolare, ricaviamo che il gradiente gode delle proprietà di linearità:

$$\vec{\nabla}[cf(P)] = c\vec{\nabla}f(P), \quad \vec{\nabla}[f(P)+g(P)] = \vec{\nabla}f(P)+\vec{\nabla}g(P)\ .$$

6. Il Gradiente della funzione distanza

Per la risoluzione dei tre problemi geometrici classici affrontati in precedenza è sufficiente conoscere il gradiente della funzione distanza da un punto. Dato un punto *O* del piano consideriamo quindi la funzione *f* che a ogni punto associa la sua distanza da *O* e cioè il modulo del vettore *P* – *O*. Abbiamo allora che
$f(P) = |P-O|$.

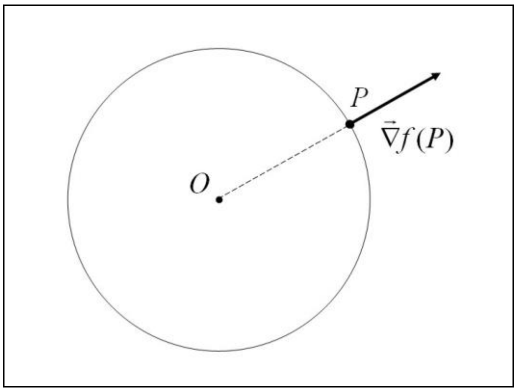


Figura 21

Le curve di livello sono allora le circonferenze di centro *O*. Risulta geometricamente ovvio che, a parità di incremento infinitesimo *ds* rispetto a un asse orientato *s* con l'origine in *P*, si ha un incremento massimo della distanza da *O* quando il corrispondente vettore infinitesimo $dP_\perp$ è diretto radialmente verso l'esterno. In quel caso la variazione della distanza è proprio uguale a $ds_\perp$ e si ha dunque che $df(P) = ds_\perp$, da cui segue che la derivata direzionale massima vale

$$\frac{df(P)}{ds_\perp} = \frac{ds_\perp}{ds_\perp} = 1$$

e quindi che $\left|\vec{\nabla}f(P)\right| = 1$.
Dunque, il gradiente della funzione distanza da un punto *O* è, in ogni altro punto del piano, un vettore di modulo unitario diretto radialmente verso l'esterno (fig.21). Possiamo giungere alla stessa conclusione introducendo un sistema di coordinate cartesiane di origine *O*. In quel caso la funzione che esprime la distanza del punto *P*(*x*, *y*) dal punto *O* è data da

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Abbiamo poi che

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

da cui

$$\left|\vec{\nabla}f(x,y)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = 1\ .$$

Inoltre,

$$\vec{\nabla}f(x,y) = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{[x,y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

per cui $\vec{\nabla}f(P)$ ha la stessa direzione e verso del vettore *P* – *O* = [*x*, *y*]. Il fatto notevole è che è stato possibile arrivare a questo risultato in modo immediato partendo da una definizione assoluta di gradiente e quindi senza fare uso delle coordinate e del calcolo delle derivate parziali.
[*Segue al numero* 266]

[2] A questo punto risulta evidente il motivo per cui l'utilizzo della stessa lettera per indicare la funzione del punto e la funzione di due variabili che si ottiene introducendo un sistema di coordinate nel piano è formalmente scorretto. Per lo stesso motivo non è formalmente corretto continuare ad indicare con la stessa lettera il sottoinsieme di punti del piano che definisce la lastra sottile e l'insieme di coppie di numeri reali che rappresenta l'insieme delle coordinate di quei punti, che cambia al cambiare del sistema di coordinate.
[3] Se *ds* è positiva, allora coincide col modulo di *dP*, altrimenti col suo opposto. Si presuppone che la monade del punto *P* sia tutta contenuta in *A*, cioè che *A* sia un insieme aperto di punti.
[4] La definizione presuppone che il rapporto differenziale sia finito e con la stessa parte standard per ogni infinitesimo non nullo *ds*.

[*] ITIS "Leonardo da Vinci" – Carpi (MO)